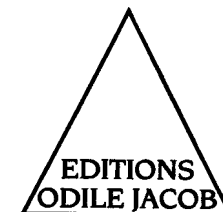


Claude-Paul BRUTER

**COMPRENDRE
LES MATHÉMATIQUES**



*Pour mes enfants
Pour tous les enfants*

© ÉDITIONS ODILE JACOB, OCTOBRE 1996
15, RUE SOUFFLOT, 75005 PARIS
INTERNET : <http://www.odilejacob.fr>
ISBN 2-7381-0435-5

Publié sous la responsabilité éditoriale
de Gérard Jorland

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Introduction

Cet ouvrage s'adresse à trois catégories de lecteurs, naturellement tous intéressés par une meilleure connaissance du monde mathématique.

La première catégorie est celle des lecteurs du monde universitaire, étudiants en particulier, qui s'interrogent sur l'univers mathématique dont ils aperçoivent seulement quelques pans, souhaitent en avoir une vision plus globale, et éprouvent parfois des difficultés à assimiler les diverses notions qu'ils rencontrent. La première partie de cet ouvrage, purement littéraire, tente succinctement de leur décrire différents aspects du monde mathématique, de ses origines, de son devenir. La seconde partie s'efforce de leur venir en aide, de faciliter leur compréhension de certains chapitres de leur cursus. Dans un esprit quelque peu étranger à celui des manuels classiques, ces pages espèrent apporter des compléments d'intelligibilité à ces ouvrages, formellement bons par ailleurs, mais où tout est mécaniquement et froidement démontré et enchaîné pour satisfaire à une vocation de rigueur qui, certes, répond à une nécessité, mais a perdu ses racines. Elles veulent aussi, comme il est naturel, apporter au lecteur une petite ouverture sur des développements des mathématiques plus avancés, mais point forcément récents.

Le souci d'intelligibilité, qui sous-tend cet ouvrage, a toujours été partagé par les savants : ils se sont toujours efforcés de faire connaître autour d'eux la manière dont ils comprenaient les événements, d'autant plus que cette manière, à tort ou à raison, leur semblait être en progrès par rapport aux savoirs antérieurs. Les philosophes tels que Diderot, quelques très rares mathématiciens comme

Poincaré, les physiciens ont été animés par le souci d'éveiller la compréhension du public. À titre d'exemple, le livre récent de F. Lurçat, cité dans la bibliographie, entend apporter « une contribution à l'intelligibilité des sciences » : il explique les grands phénomènes de la physique, sans formule, et les étudiants seront ravis. Le thème de l'intelligibilité devient aujourd'hui un thème philosophique, et il est hautement significatif et réjouissant que l'école mathématique américaine l'aborde dans les colonnes du bulletin de son association (cf. l'article de Thurston, médaille Fields, cité en référence).

La seconde catégorie de lecteurs est celle des décideurs. Hommes politiques, administrateurs issus de corps divers, pédagogues siégeant dans des commissions, ils fixent le contenu des programmes d'enseignement, et, à travers leurs décisions, engagent l'avenir culturel, mais aussi peut-être économique et humain, de générations, d'un pays. Ils pourront se satisfaire de la lecture de la première partie de l'ouvrage : si les deux premiers chapitres portent principalement sur la nature et la place des mathématiques, le troisième concerne la pédagogie des mathématiques. Il apporte, en matière de conception des programmes et de pédagogie, des éléments de discussion forts, fidèles à une tradition dont Henri Poincaré s'est fait le héraut.

L'un des rôles majeurs de l'éducation est de former l'esprit des jeunes gens pour qu'ils soient mieux à même, notamment par leur équilibre intérieur, de supporter les souffrances, de venir à bout des épreuves quelle qu'en soit la nature, d'apporter leur contribution pour réduire autant que faire se peut, à l'échéance la plus brève possible, les désagréments que notre humanité peut connaître.

Une telle formation suppose qu'on développe et élargisse la sensibilité de l'être, et non point qu'on la restreigne, qu'on développe et élargisse à travers cette sensibilité aiguisée le souci de comprendre, et non point qu'on fige l'intelligence dans les limites d'un domaine de pensée borné. L'intuition de Poincaré lui a fait pressentir des évolutions dont il s'est alarmé. Il a craint que l'enseignement, en particulier celui des mathématiques, ne se dirige vers des formes qui émoussent la sensibilité plutôt qu'elles ne l'exercent, comme cela lui paraît nécessaire.

L'avenir lui aurait-il donné raison ? Le tout-puissant esprit juridique français, si contraire aux transformations souples, à l'initiative, n'en finit pas d'essayer de s'adapter à un enseignement de masse : on a cru nécessaire de sacrifier sur son autel les qualités éprouvées d'une tradition pédagogique qui, en soi, n'avait rien de spécialement élitiste ou bourgeois. Toujours est-il que l'enseignement de la géométrie classique s'est effondré ; il éprouve bien des

difficultés à renaître de ses cendres, sous une forme ou sous une autre. Quant à l'enseignement de la géométrie des premières années de l'enseignement post-secondaire, il s'avance pour le moins tristement masqué derrière les paravents du formalisme et du calcul, ce qui, bien sûr, ne peut que précipiter une certaine faillite de l'enseignement des mathématiques à ce niveau. Parente pauvre de l'enseignement présent, l'accent a été mis ici sur la géométrie, ce terme devant être, dans cet ouvrage, pris dans un sens large.

La dernière catégorie de lecteurs est celle du public cultivé, public peut-être devenu plus rare, et donc plus attachant et plus précieux à sauvegarder. Contrairement à ce que laissent croire certains journaux, la culture ne se confond point avec le divertissement, quelle qu'en soit la qualité éventuelle ; le public auquel s'adresse l'ouvrage le sait. On rencontre bien sûr des cultures en quelque sorte spécialisées, comme la littéraire ou la scientifique : C.P. Snow les voyait dorénavant dissociées. La culture vraie les englobe au sein d'une unité de sensibilité et de pensée, qui permet d'atteindre une forme de sérénité, sans illusion, mais non dénuée d'espoirs.

Certains chapitres de la première partie ont été rédigés à l'instigation de quelques amis : Miguel Espinoza (chapitre I), Théodore Ivainer et Francis Bailly (chapitre II), Michèle Leclerc-Olive (chapitre IV). Après m'avoir accueilli aux Éditions Odile Jacob, Gérard Jorland a relu le manuscrit avec un grand soin, proposant maints allègements stylistiques, faisant part de ses interrogations et de ses suggestions. À tous, j'adresse ici mes vifs remerciements.

Je n'aurai garde enfin d'oublier l'ARPAM. Cet ouvrage n'aurait jamais vu le jour sans son inestimable concours matériel.

PREMIÈRE PARTIE

**DES MATHÉMATIQUES
POUR QUOI FAIRE ?**

Chapitre I

Sur la pertinence des mathématiques

La place des mathématiques au sein des instances universitaires, dans la cité, est-elle appréciée à sa juste valeur ? De la réponse à cette question, d'une éternelle actualité, dépendent entre autres le statut immédiat des mathématiques, l'importance du rôle qu'elles vont jouer, la manière dont elles vont pouvoir se développer. On découvre ainsi rapidement la très grande ampleur de l'enjeu.

Il ne semble pas que cette problématique ait été abordée de manière systématique. Il n'existe pas d'organisme, de commission même, qui se penche régulièrement sur cette question. Comme souvent en économie, on s'en remet à la décision d'une sorte de main invisible qui fait surgir des confrontations quotidiennes, et à tous les niveaux d'organisation de la société, une réponse spontanée que seule l'observation des pratiques permettrait de formuler plus ou moins.

On ne saurait traiter en quelques lignes du problème de la place des mathématiques dans la société. En mentionnant trois aspects classiques de cette question, ce problème ne sera ici qu'effleuré. On se propose de dire simplement quelques mots sur les liens entre les mathématiques et les sciences fondamentales, sur les rapports entre les mathématiques et les sciences appliquées, enfin sur les mathématiques comme instrument de formation de l'individu et d'insertion dans la société.

LES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES FONDAMENTALES

Les mathématiques souffrent d'un manque de définition : ce manque traduit le caractère ouvert de cet être quasi biologique, protéiforme, en évolution, qui grandit, croît sans cesse, se développe dans des directions inconnues autrefois.

Cet épanouissement s'effectue selon des schémas de nature endogène et exogène. Certains schémas endogènes, en particulier les procédures et les méthodes de raisonnement, ont pu être formalisés, donnant naissance à la logique. Quoique éminemment utiles à connaître pour comprendre et caractériser l'être mathématique, ces schémas, dont l'étude remonte à Aristote au moins, ne sont pas traditionnellement inclus dans le corpus mathématique proprement dit ; ni Aristote lui-même ni Bourbaki encore n'ont accompli le pas de procéder à cette inclusion.

Les mécanismes créateurs de l'être mathématique proviennent de l'activité même de notre pensée, où la part de représentation est si importante. Ce sont les phénomènes physiques les plus stables à notre échelle de perception qui ont donné naissance aux notions fondatrices.

Citons par exemple la vaste étendue des phénomènes électromagnétiques, à laquelle se rattache l'optique classique dont la branche principale est la géométrie, euclidienne, projective : étude des ombres que font les figures éclairées par des faisceaux lumineux, étude des invariants de ces ombres lorsqu'on déplace ces faisceaux. La géométrie est donc initialement la théorie des contours apparents des objets, fussent-ils des territoires, grands ou petits, privés ou collectifs, et, à travers l'étude de ces contours, la théorie de leur organisation interne.

Des données d'ordre physique sont à la source des notions fondatrices des mathématiques. La construction de l'édifice mathématique lui-même repose également sur d'autres raisons. Elles peuvent être d'ordre sociologique, personnel, ou internes à la science elle-même : ainsi les nécessités de cohérence, de réalisation *a minima*, de mettre au jour la totalité des conséquences impliquées par les propriétés fondamentales ont fortement contribué à façonner l'édifice.

On a pu même penser que la création de la théorie des nombres ou celle des géométries non euclidiennes s'étaient accomplies en l'absence de références physiques. Dans ces deux exemples, le poids des facteurs endogènes est important, mais l'exemple géométrique est plus subtil qu'il ne paraît.

Les raisons qui ont conduit certains mathématiciens à fixer leur attention sur la recherche (vaine) d'une démonstration de l'axiome des parallèles (le cinquième postulat d'Euclide) sont assez claires : il est apparu rapidement que la propriété de parallélisme jouait un rôle central en géométrie euclidienne, gouvernant le théorème de Thalès à partir duquel s'organisent les démonstrations des principaux théorèmes. Il était d'autre part évident que cette propriété de physique locale apparente, le parallélisme de deux rayons lumineux voisins, pouvait n'avoir effectivement que valeur locale, et permettre du point de vue global toutes les variantes. Les premières ont été décrites par Apollonius, puis par Desargues, sur les bases de l'observation courante : la création de la géométrie projective ne doit rien à toute forme d'analyse logique des fondements.

Quant au traité de Lobatchevski, il est tout à fait clair que le souci d'apuration logique que l'auteur manifeste n'aurait pu conduire à un résultat s'il n'avait eu constamment sous ses yeux la présence physique de la géométrie sphérique, en laquelle par ailleurs l'astronome Gauss, directeur de l'observatoire de Göttingen, était passé maître.

Il est donc tout à fait illusoire de croire que la naissance des géométries non euclidiennes est due au seul souci rationnel de l'esprit.

Le cas de la théorie des nombres est différent. Certes le modèle premier de l'arithmétique est de nature physique. Imaginons une salle, un espace peuplé d'objets : le modèle de l'arithmétique consiste en la description de cet espace par l'intermédiaire de ces objets, dont on affecte d'ignorer toutes les propriétés hormis celles de leur existence et de leur présence dans l'espace considéré. Si je dis « quatre », se dessine d'abord dans l'espace mental la vision fugace d'une salle où figurent effectivement quatre objets dont la localisation, la forme, la couleur, le poids physique, la pesanteur sociologique, etc., n'ont ici aucune portée : quatre est ce *modèle de présence*, mais qui, bien sûr, représente de manière potentielle une énergie physique.

Il faut souligner le caractère rudimentaire de ce modèle, qui lui assure sa grande généralité, en fait souvent la force, et le rend apte à un usage formel. C'est à propos de ce modèle que l'on peut mieux faire apparaître, à un premier niveau, les effets positifs du travail interne auquel se livrent les mathématiciens, à travers la création de corps de nombres, à travers la recherche de classifications et d'invariants de classes. On notera le caractère abstrait des corps créés, le temps qu'il a fallu pour admettre au moins l'un des premiers d'entre eux, celui des complexes, justement parce qu'il n'a pas de répondant physique immédiatement perceptible. L'univers physique auquel il s'applique en premier est celui de l'électromagnétisme qui, hormis le

phénomène lumineux, échappe entièrement à nos sens. On notera aussi le rôle physique, majeur, joué par le mouvement dans la genèse de ces nouvelles études, ce qui atténue fortement l'importance que l'on pourrait attribuer à l'analyse structurale proprement dite, qui se ferait *a priori* : de manière générale, comme le pensait Cayley au siècle dernier, il est possible de faire apparaître tout groupe comme un groupe de mouvements, le plus ancien et le premier étudié étant celui des permutations. La permutation d'objets suppose bien sûr la possibilité de les mouvoir. L'interprétation d'une permutation comme une réflexion dans un miroir situé dans un plan médiateur entre les deux objets nous ramène au rôle fondateur joué par l'optique dans le développement des mathématiques.

Une bonne partie de l'algèbre et des mathématiques concerne l'invariance, rattachée évidemment au concept naturel de stabilité, de propriétés, de structures, etc., par rapport à des mouvements : des repères, des objets, ou des cheminements pour les atteindre, les parcourir et les décrire.

C'est encore la physique, exogène, qui aura fourni le concept fondamental. Mais il arrive que ce soit le formel, l'endogène, qui fasse apparaître l'objet nouveau, tantôt comme objet limite obtenu à la suite d'une infinité de démarches opérées sur des objets d'un monde connu, tantôt et souvent dans une première étape, comme objet situé au-delà de la frontière de ce monde.

La stabilité, prodigieuse, des phénomènes optiques, celle, acceptée, des objets, autorisent l'établissement de liens durables entre propriétés ; elles justifient la pérennité des causalités internes aux démonstrations et aux processus constructifs de la géométrie. L'implication « la proposition A entraîne la proposition B » n'est valide qu'en raison d'abord de la stabilité de la proposition A, des objets et sous-objets sur lesquels porte cette proposition, lesquels ont donné naissance à un corps d'énoncés décrivant leurs propriétés, contenus de manière implicite ou explicite dans le discours associé à A. L'émergence de B provient ou bien d'un réaménagement de l'enchaînement des énoncés à l'intérieur de ce corps, ou bien, plus généralement, de l'introduction exogène, physiquement admise au sein de la théorie, soit du changement du repère d'observation, de la procédure d'observation, du support de la représentation, soit d'une restriction à l'une des propriétés mises en jeu, ou au contraire d'une extension supputée ou déjà reconnue possible de l'une des propriétés, voire de l'ajout d'une propriété nouvelle.

Ces considérations ne portent pas de manière exclusive sur la géométrie classique. Elles concernent au contraire toutes les branches de l'édifice mathématique. Celui-ci apparaît alors comme

un ensemble d'univers physiques abstraits, extraits du monde quotidien par oblitération de certaines propriétés qui ne jouent aucun rôle apparent dans l'architecture et dans la construction de l'édifice.

Cette physique théorique et abstraite, traitant de la nature, de l'occupation, des transformations et des métriques de l'espace, tire sa validité de la véracité des observations premières qui en constituent les soubassements, ainsi que de leur pérennité spatio-temporelle. La mathématique, en tant que réalisatrice d'expériences de pensée, en tant que réflexion sur le monde physique, constitue ainsi le prolongement naturel et obligé de la physique dans laquelle elle trouve ses véritables fondements ; en retour, ses développements permettent d'approfondir la connaissance du monde physique, de voir ou même de prévoir des comportements ou des propriétés qui avaient encore échappé à la sagacité des chercheurs.

Bien des siècles peuvent s'écouler entre le moment où se réalise un travail mathématique et celui de son utilisation. Dix-huit siècles séparent l'étude des coniques par Apollonius de Perge de leur emploi par Kepler. Le problème de la manière dont la nature remplit l'espace par la matière est évidemment parmi les plus passionnants. Si l'on s'attache à un remplissage régulier de l'espace, on est amené à étudier la théorie des polyèdres, celle des groupes cristallographiques, plus généralement celle des pavages. Les cinq polyèdres réguliers euclidiens sont connus depuis Platon, les treize polyèdres euclidiens semi-réguliers sont connus depuis Archimède : ce n'est qu'aujourd'hui, vingt et un siècles donc après la découverte d'Archimède, que les chimistes ont pu utiliser ces travaux pour étudier les fullerènes, des corps nouveaux dans notre proche environnement. On peut s'interroger : dans combien d'années, dans quels domaines utilisera-t-on les polyèdres hyperboliques sur lesquels travaillent aujourd'hui divers mathématiciens ?

Ces deux derniers exemples montrent, avec assez d'éloquence, l'intérêt majeur de la spéculation mathématique, la nécessité d'en maintenir la vitalité si l'on veut accroître notre connaissance de l'univers physique et développer notre capacité à prévenir les effets catastrophiques que des transformations locales de cet univers pourraient avoir sur notre humanité, si l'on veut aussi pouvoir se doter d'objets nouveaux propres à mieux assurer notre protection et notre bien-être. Ces exemples montrent aussi la nécessité de faire preuve d'une grande patience, d'une grande tolérance, d'une sagesse à l'égard de cette même spéculation, qui nous apprend aussi à projeter un regard lointain, et parfois optimiste, sur l'avenir.

LES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES APPLIQUÉES

La découverte, le choix des concepts féconds ont été le fait de quelques hommes seulement, illustres par leur puissance de pénétration. La justesse de leur intuition et la finesse de leurs remarques, corroborées plus tard par les observations physiques, ont assuré la pertinence des théories mathématiques qu'ils ont contribué à créer et à développer. Il est remarquable que ces grands esprits – citons par exemple Archimède – aient manifesté de l'aversion pour les mathématiques appliquées, telles que les conçoivent par exemple les biologistes ou les chimistes qui se trouvent éloignés, par leurs conceptions et leurs pratiques, des sciences fondamentales.

Ceux qui ignorent la mathématique font parfois preuve d'une grande naïveté à leur égard : ils la croient toute-puissante, capable de modéliser sur-le-champ le phénomène qu'ils ne comprennent pas, de suggérer l'expérience cruciale qui donnera corps à une intuition encore très obscure. Les mathématiciens sont beaucoup plus modestes dans leurs ambitions et recommandent la prudence avec certains illusionnistes qui, succombant peut-être eux-mêmes à la magie de leur propre verbe émaillé de termes mathématiques, impressionnent quelques personnes dans un auditoire crédule.

Les mathématiques appliquées n'ont pas, non plus, de statut bien défini. On conçoit souvent le mathématicien appliqué comme un technicien chargé de mettre en marche le moteur d'une machine qui conduira à la solution du problème que s'est posé un créateur de modèle. Ce mathématicien peut être lui-même associé à la création du modèle, voire en être le concepteur. Mais, plus souvent, placé entre le marteau du puriste et l'enclume de l'utilisateur, il met en œuvre les méthodes élaborées par d'autres mathématiciens purs. Tel qu'il est formé à l'heure actuelle, il est en général spécialisé dans l'emploi d'une certaine technique (équations différentielles, analyse fonctionnelle, optimisation, statistiques). Cette spécialisation a tendance à mouler l'esprit dans une sorte de corset mental. Elle peut ainsi avoir un effet néfaste sur les facultés d'imagination, au point d'empêcher toute ouverture sur des théories nouvelles plus puissantes que les anciennes, peut-être parce qu'elles font appel à des concepts de base situés en dehors du champ de spécialité. En s'en tenant au seul numérique, le mathématicien ferait fausse route : les théories n'ont de pertinence pour les applications que par la valeur de leur arrière-plan géométrique. La géométrisation des objets et des processus est le grand procédé par lequel nous avons pu progresser dans la connaissance de la nature. Ce procédé est constamment uti-

lisé dans les mathématiques elles-mêmes, comme vient de le montrer encore avec éclat la preuve récente d'un célèbre théorème d'arithmétique. En matière d'équations aux dérivées partielles, dont l'emploi est constant en physique, la seule théorie permettant d'obtenir un calcul effectif des solutions, celle de W. Shi, est encore une théorie géométrique.

En général, le mathématicien dit appliqué n'est pas un géomètre *stricto sensu*, sinon il aurait sans doute choisi de pratiquer d'autres formes de mathématiques. Or, en dehors du numérique pur qui a son intuition particulière, chaleureuse et subtile, c'est, soutenue certes par un arrière-plan rationnel, par une sorte de vision spatiale, de nature physique, que l'on comprend les phénomènes, que l'on voit des propriétés. Si donc les capacités du fin calculateur lui font défaut, le mathématicien appliqué restera en porte à faux tant vis-à-vis du mathématicien dit pur qu'à l'égard de celui qui aura fait appel à lui.

Ainsi, sur le plan de la connaissance mathématique, le mathématicien appliqué n'apporte pas toujours de résultat significatif, le mathématicien pur non plus, bien sûr, soit parce qu'il n'a pas encore eu la chance d'être frappé par la grâce, soit parce qu'il lui manque la pratique profonde de la discipline dans laquelle opère son modèle, et qui lui permettrait d'entrevoir des propriétés intéressantes, originales : ayant deviné leur présence, il les ferait surgir du modèle, découvrant ainsi peut-être des propriétés mathématiques nouvelles. Un exemple de réussite dans ce sens est le travail de Lorenz en 1962 qui a représenté une évolution hydrodynamique par une équation différentielle, laquelle a permis de découvrir le premier attracteur étrange.

Les cas de succès analogues sont aussi rares que célèbres. Ils ne sont pas d'ailleurs le fait de mathématiciens appliqués en tant que tels, mais de physiciens faisant preuve d'une grande pénétration dans leur domaine, connaissant également assez de mathématiques pour formuler convenablement leur problème, et, de cette formulation, en tirer la quintessence. L'espoir de voir les mathématiques appliquées parvenir à des résultats de cette nature est plutôt fragile, pour des raisons qui tiennent en grande partie aux capacités intrinsèques des individus et à leur formation scientifique actuellement incomplète.

Par ailleurs, certains modèles sur lesquels travaillent ou travailleraient des mathématiciens appliqués n'ont guère de pertinence. Bien des modèles biologiques ou économiques, eu égard à la très riche réalité sous-jacente, apparaissent comme trop simplificateurs pour présenter un intérêt. Faut-il rappeler que Max Planck

commença par étudier l'économie qu'il abandonna pour la physique, s'apercevant très vite de la complexité du sujet ? La biologie théorique se cherche, au même titre que l'économie théorique. En dehors de certains modèles relevant de la microéconomie, en particulier ceux qui touchent la gestion et l'organisation des entreprises (par exemple les modèles de contrôle de fabrication ou de gestion des stocks), les théories économiques et les modèles qui en relèvent, comme par exemple celui de Debreu, ne sont encore que des exercices d'école. On sait bien que les modèles sont, entre autres, parfois utilisés pour justifier par le mirage du discours mathématique des présupposés de diverse nature. Parler de mathématiques biologiques ou économiques est pour le moment abusif. Contrairement à ceux, en général, de la physique, les modèles inspirés par la biologie ou l'économie n'ont pas encore été la source de structures, de théories ou d'énoncés marquants, même si certains, comme les jeux, les automates, les réseaux, ont atteint un statut déjà enviable. Par énoncé marquant, entendons celui d'un fait ou d'une propriété jouant un rôle important dans différentes branches des mathématiques. Nul n'en déduirait, bien sûr, que toute recherche dans ces domaines doit se défaire de l'emploi des mathématiques ; bien au contraire, ces recherches demandent des efforts de réflexion accrus et sous-tendus par de très vastes connaissances.

Les propos précédents, reflets d'une impression générale, jettent bien sûr quelques doutes sur la pertinence des mathématiques appliquées, telles qu'elles peuvent être pratiquées. Le statut psychologique du mathématicien appliqué est naturellement victime de ce statut scientifique.

Pourtant, les mathématiciens appliqués, dans notre pays tout au moins, ont pris une place grandissante : des raisons d'ordre scientifique sérieuses se sont ajoutées à des raisons socio-psychologiques et politiques. La communauté mathématique, pour mieux assurer sa pérennité et son développement, a joué la carte des mathématiques appliquées auprès des pouvoirs publics, chez qui le court terme et l'utilitaire immédiat pèsent d'un très grand poids. Des raisons objectives se conjuguèrent à ces raisons stratégiques : le développement des industries liées à l'atome, le déplacement dans l'espace, l'armement, la télécommunication et l'informatique, la mise en application des méthodes modernes de gestion, nécessitent la formation d'ingénieurs et de techniciens dotés d'un savoir mathématique adapté à leur fonction de recherche et de mise au point pratique de techniques nouvelles, au moins capables de comprendre le fonctionnement de ces produits nouveaux pour mieux en vanter les mérites. Ne serait-ce que pour ces raisons d'ordre industriel et commercial, la

place des mathématiques appliquées méritait d'être davantage reconnue. Par ailleurs, les mathématiciens appliqués (analystes fonctionnels appliqués, statisticiens), qui souffraient d'un manque de reconnaissance honorifique de la part des puristes, se sont rassemblés en un groupe de pression très actif, lequel, pour ces mêmes raisons, a su s'imposer, notamment au sein de la plupart des instances nouvelles. Mais, animés de passions engendrées par les blessures anciennes, leur influence sur la conception des programmes d'enseignement n'a pas toujours été heureuse.

SUR DIVERSES CONCEPTIONS DE L'EMPLOI DES MATHÉMATIQUES

Avant d'aborder la question pédagogique, il convient de dire quelques mots sur les manières de concevoir l'emploi des mathématiques.

La première manière, traditionnelle et qui imprègne encore avec tant de force l'esprit de beaucoup, est essentiellement métrique en ce sens que le quantitatif y joue le rôle de premier plan. Pour certains, les mathématiques ne sont qu'un outil domestique destiné à leur donner une appréciation chiffrée, une description numérique, une prévision quantitative.

L'univers topologique sous-jacent au monde géométrique n'a été dévoilé qu'à partir du siècle dernier. Poincaré, après avoir démontré l'impossibilité de donner des solutions analytiques au problème à n corps, a pris conscience que, pour nombre de problèmes, la prévision de nature topologique, non quantitative, était ce que l'on pouvait faire de mieux. On notera que le renoncement à un idéal de prévision complètement quantifiée sauvegarde l'essentiel : la compréhension des phénomènes.

En l'occurrence, il s'agit encore de phénomènes physiques, c'est-à-dire se rapportant à des systèmes relativement simples, homogènes quant à la nature de ses constituants au nombre gigantesque, et sur lesquels agissent des champs de même nature.

Si l'on quitte le domaine des systèmes physiques ou des systèmes de constitution analogue, on rencontre les systèmes biologiques, économiques, les sociétés animales et humaines : il arrive qu'on puisse faire des modélisations de type physique parce que les conditions de constitution et de nombre sont réunies. Mais en général le niveau de complexité y est tel que le quantitatif n'est, pour l'instant, que rarement accessible, et même, le plus souvent, nous savons encore trop mal représenter ces systèmes pour pouvoir utiliser efficacement les outils topologiques et en déduire des prévisions quali-

tatives. Cependant, dans certains cas, ces outils, sous forme de modèles locaux analogiques, ont pu être utilisés avec un succès sociologique relatif non point pour prévoir, mais pour comprendre, ou tout au moins pour faire éprouver le sentiment rassurant que l'on comprend ce qui advient.

Les mathématiques ont cette vertu d'exemplifier certaines situations, certains comportements, et finalement d'en montrer l'universalité. Elles ont contribué à révéler l'importance de concepts facilement accessibles tels que la stabilité, la singularité, la bifurcation, et issus de l'examen attentif de situations physiques. Ce sont des concepts de nature dynamique, en rapport direct avec la manière dont se structurent tous les milieux en évolution, qu'ils soient physiques ou non.

Leur seul emploi permet de comprendre, ou même de justifier, la présence de nombreuses structures morphologiques, de bien des phénomènes des mondes biologique et social. Pourquoi cela ? Dans sa démarche, la pensée postule l'existence d'un modèle du phénomène ; elle n'a pas besoin de connaître ce modèle explicitement pour envisager les conditions, les modalités et les caractéristiques de son évolution. À ce niveau de généralité, la recherche d'une prévision qualitative est abandonnée, pour un temps au moins. Reste seulement la compréhension de la structure spatio-temporelle du phénomène, voire simplement l'acceptabilité de son existence.

Les mathématiques ne sont plus alors conçues comme outils de représentation explicite et de prévisibilité parfaite, mais plutôt comme outils conceptuels. Elles font figure d'instrument universel d'intelligibilité. Telle est l'une de leurs principales fonctions.

LES MATHÉMATIQUES ET LA FORMATION DE LA PENSÉE

Il semblerait alors nécessaire que chacun puisse être formé au maniement de l'outil mathématique, pour être à même d'utiliser les capacités étendues de cet outil à la représentation des situations, à la simulation de leurs évolutions, à l'intelligibilité des faits.

Toutes les sociétés un peu évoluées sur les plans technique et marchand ont bien sûr reconnu cette valeur pragmatique des mathématiques, et ont accompli les efforts nécessaires pour dispenser des enseignements répondant aux exigences économiques de l'époque. Le développement récent et important des mathématiques appliquées témoigne de cette attention du pouvoir politique.

Paradoxalement, dans le même temps, les médias ont dénigré les mathématiques. On dénonçait « l'impérialisme des mathéma-

tiques », présentées comme l'instrument principal de sélection. Si donc les mathématiques ont servi d'outil de sélection, alors les hommes qui tiennent aujourd'hui en main les rênes du pouvoir immédiat, politique, administratif ou financier, ont été choisis sur leur aptitude à faire des mathématiques. Or que constate-t-on en fait à la lecture des *curriculum vitae* de tous ces hauts responsables ? Ils n'ont pas, en général, de formation scientifique. Les médias n'ont-ils pas asséné, propagé des contre-vérités ? Pourquoi ?

Il est exact que les mathématiques ont tenu une place importante dans le système d'enseignement des sociétés occidentales, surtout de la société française moderne. On connaît la fonction que leur attribuait Platon dans la formation du citoyen de sa République idéale. On connaît aussi le rôle joué par les mathématiciens pendant la première République et au cours du premier Empire. Lazare Carnot a été non seulement l'« organisateur de la victoire », mais aussi le créateur de l'École polytechnique, avec son ancien professeur Monge, un des meilleurs amis de Napoléon Bonaparte. Chez eux, la géométrie, « accessible » ou non (la géométrie non accessible se confond dans leur esprit avec le génie et l'intuition), était souveraine : les premiers recrutements à l'École polytechnique se faisaient sur la base d'une seule épreuve de géométrie. Les conceptions pédagogiques de ces deux maîtres ont contribué à modeler le paysage pédagogique français jusqu'au seuil des années 1980.

Le développement considérable des sciences a obligé l'empire des disciplines classiques à se rétrécir. Seuls le français et les mathématiques ont conservé une place importante. Mais le contenu des programmes a été beaucoup modifié.

Les premières révisions des années 1960 ont été apportées dans le souci très légitime de moderniser le contenu des enseignements. Alors que plusieurs siècles d'expérience avaient permis d'asseoir le contenu et la pédagogie des anciens programmes, qui, sur le plan de la formation intellectuelle, donnaient d'excellents résultats, les premières réformes ont été conçues sur des bases psychologiques incorrectes, et appliquées de manière hâtive, dans de mauvaises conditions puisque les enseignants n'étaient nullement formés pour assurer ces nouveaux enseignements. Au fil des ans, des corrections ont été apportées, et la réforme s'est étendue à toutes les classes du secondaire avec un résultat honorable sur le plan mathématique. Quelques années supplémentaires auraient permis d'améliorer la qualité de cet enseignement.

Celui-ci a finalement été détruit au cours des années quatre-vingt. Plusieurs causes se sont évidemment conjuguées pour aboutir à cette issue.

1. Les premières années du remodelage ont laissé de mauvais souvenirs, et imprimé une mauvaise image de marque aux mathématiques.

2. Le contenu psychologique et scientifique des nouveaux programmes n'a jamais été fameux, et il a contribué au rejet des mathématiques. Il faut rappeler que la communauté mathématicienne était divisée sur le contenu des programmes. Qu'on se souvienne des réserves de Denjoy ou de Thom, ce dernier assurément moderne, qui soulignait les mérites de l'enseignement de la vieille géométrie euclidienne dans le secondaire. Quoi qu'il en soit, un certain contenu a prévalu, pas assez bien pensé il faut le croire, puisqu'il n'a pas survécu.

3. Une dernière cause, et non des moindres, qui a conduit à la situation actuelle, est de nature sociologique et politique. Le niveau du chômage montait. N'était-il pas judicieux d'essayer de le stabiliser en retardant l'arrivée des jeunes sur le marché du travail tout en profitant du délai supplémentaire accordé avant l'entrée dans la vie active pour améliorer la qualité professionnelle et culturelle de cette future main-d'œuvre ? Tel, semble-t-il, a été l'un des ressorts véritables des politiques éducatives suivies par nos gouvernants pendant plusieurs années.

Comment faire aboutir, au moindre coût et *rapidement*, car les échéances électorales et les contraintes économiques étaient là, une telle politique qui, dans son principe, n'a rien d'offensant ?

Une procédure d'urgence s'est imposée : supprimer les principaux obstacles qui détournaient les moins aptes des études, allonger la durée moyenne nécessaire à l'acquisition des connaissances, tout en exerçant une intense action psychologique auprès des familles et des enseignants pour faire valoir le bien-fondé des réformes proposées et entraîner l'adhésion, pour masquer aussi la perte obligatoire de qualité engendrée par cette politique hâtive.

Les enseignements littéraires et celui des mathématiques ont fini par être attaqués de front. Le résultat de cette politique a été le suivant : les élèves du secondaire n'ont plus l'esprit structuré par une théorie qu'ils dominent, on leur apprend des résultats parcellaires et hybrides, sans pratique ferme de la démonstration. Comment s'étonner que, pour la plupart, les nouveaux étudiants de nos universités n'aient aucune base sérieuse en mathématiques, éprouvent tant de difficulté à trouver une explication, ne savent même pas construire un raisonnement ! Un collègue va même jusqu'à dire que ces étudiants ont l'esprit déformé. *Et ces défauts, on les retrouve dans toutes les disciplines !*

Avant de rappeler les mérites de la formation de l'esprit par les

mathématiques, posons encore une question, dont on voudra bien peut-être pardonner la trivialité. Tout pays a besoin d'être conduit au mieux. Les hommes chargés de le diriger font partie de ce qu'on appelle « l'élite intellectuelle » de la nation, ils doivent donc recevoir la meilleure formation possible. Est-il admissible que cette future élite, tout entière façonnée dans le même creuset jusqu'à sa majorité, le soit constamment dans un moule présentant de telles déficiences ?

Venons-en à la partie finale de ce propos, à savoir pourquoi tous les enfants méritent de recevoir un véritable enseignement de mathématique, à travers un bref rappel des vertus formatrices d'un tel enseignement : structuration de l'esprit, entraînement aux formes diverses du raisonnement qui aident à reconstruire l'enchaînement des causalités du monde physique, entretien de la mémoire, des facultés d'attention et de persévérance, développement de l'intuition spatiale et des capacités de représentation, d'analyse, de synthèse, d'imagination.

Du point de vue de la formation de l'esprit, l'avantage des mathématiques reste inégalé, car aucune autre discipline ne permet d'atteindre autant d'objectifs avec autant de pugnacité, de densité, de rapidité.

Il est remarquable et étonnant que les programmes d'enseignement n'aient pas été forgés avec ce souci premier de former l'esprit. Ils ont apparemment davantage été conçus dans une perspective utilitaire et immédiate. Les programmes furent établis, semble-t-il, en tenant compte avant tout des intérêts soit des mathématiciens pour leur Église, soit des physiciens pour leur pratique. Une conception de l'enseignement des mathématiques uniquement fondée sur ces intérêts serait sectaire, naïve et préjudiciable : sectaire évidemment, naïve et préjudiciable car le remplissage d'un réservoir mal fait ne saurait être optimal, le fonctionnement d'une machine mal conçue sera toujours déficient.

On imagine volontiers qu'interrogés sur le contenu de programmes orientés d'abord vers la formation de l'esprit, même prenant en compte les facteurs psychologiques, les mathématiciens puissent répondre de manière diverse. Voici trois des points de vue qui mériteraient une discussion.

La démonstration doit être réhabilitée dans le secondaire : les élèves doivent connaître les faits mathématiques en même temps que leur preuve. S'il n'a pas l'intelligence immédiate d'un énoncé et de sa démonstration, l'élève entraînera son esprit à la réflexion, à l'observation, au raisonnement, apprenant l'effort sur soi-même pour parvenir à ce degré de compréhension et de maîtrise à partir duquel la démonstration autant que l'énoncé paraissent naturels. Cet

exercice lui sera utile non seulement pour apprendre plus facilement les mathématiques qui viendront dans la suite, mais également dans son étude du monde physique qui requiert les mêmes qualités mentales.

En second lieu, il serait nécessaire que l'élève finisse par connaître une partie des mathématiques assez importante pour éprouver le sentiment de dominer une théorie. Ainsi formera-t-il son esprit à la synthèse, par l'apprentissage progressif d'un tout quelque peu complexe mais organisé de manière harmonieuse. Dans un monde envahi d'informations, compliqué, difficile, dangereux, il paraît indispensable de développer en chacun cette capacité de synthèse qui soutient le jugement.

En dernier lieu, il convient de développer la vision spatiale et l'intuition géométrique tout en faisant apparaître les premiers éléments descriptifs formels qui sont de puissants outils techniques de démonstration. La raison principale de ce choix vient du fait que toutes les sciences, mathématiques comprises, comme nous l'avons déjà dit, traitent en définitive, sous une forme ou sous une autre, de l'espace – sa définition, sa structure, les objets qu'il peut contenir, leur comportement –, de sorte que les exercices mentaux portant sur la représentation spatiale contribuent au développement de l'intelligence intuitive et rationnelle de la nature.

On tiendra compte aussi de ce que la réalité est spatiale avant d'être formelle, du fait également que le topologique a une primauté sur le métrique : ce qui caractérise la vie est la différenciation progressive de singularités totipotentes, différenciation accompagnée d'une cristallisation progressive au caractère métrique de plus en plus accentué. Ainsi, par exemple, le bébé a une perception topologique de l'espace, et il élabore petit à petit ses repères métriques, selon une, puis deux et trois dimensions.

L'enseignement des mathématiques traditionnel a cru bien faire en oblitérant le topologique et en fixant la perception de l'espace sur l'uni- puis le bidimensionnel. On ne peut alors s'étonner de l'énorme difficulté que rencontrent les étudiants à se représenter les objets mathématiques dans l'espace ordinaire, à comprendre les faits d'analyse, faute de la compréhension géométrique des résultats et des mécanismes traduits numériquement ou formellement. La conséquence de cette habitude pédagogique rigide et limitée, c'est un frein à l'imagination, à l'intuition : il faut rompre avec une telle habitude mutilante.

Ainsi, dans l'enseignement secondaire où l'emploi utilitaire des mathématiques est très restreint, mais où, par contre, le caractère formateur des mathématiques est prépondérant, il apparaît néces-

saire de soutenir et d'asseoir la perception topologique initiale tout en assurant une formation géométrique sérieuse. L'adhésion à ces nouvelles formes d'enseignement de la géométrie, prise dans un sens large, sera d'autant plus vive que l'accompagnera la stimulation des affects provoqués par la vue des merveilleuses réalisations artistiques que l'alliance de la couleur et de la géométrie parvient aujourd'hui à réaliser.

SUR LA PERTINENCE PSYCHOLOGIQUE DES MATHÉMATIQUES

Cette dernière remarque a l'apparence anodine d'une petite remarque d'ordre technique sur la pédagogie des mathématiques. Mais, à l'évidence, elle s'insère dans un cadre beaucoup plus général et profond qui concerne les rapports que l'homme entretient avec la société, la nature, et où affleure un autre aspect, et non des moindres, de la pertinence des mathématiques.

Peut-on encore, de nos jours, faire le rêve platonicien, caresser l'espoir de parvenir à construire un monde harmonieux, beau, dans lequel tous les hommes puissent éprouver constamment une joie intérieure qui illumine leur vie ? Les cataclysmes de la nature, qui se joue de notre impuissance, les événements tragiques qui ont jalonné et secouent toujours l'histoire des hommes, ont tendance à détruire un optimisme inné ou immédiat. Pourtant, l'homme a besoin du rêve pour concevoir de meilleures organisations, il a besoin de s'évader, par moments, de la réalité et de reposer son psychisme afin de reprendre assez de forces intérieures pour pouvoir affronter à nouveau les difficultés quotidiennes. L'homme est ici un enfant.

Les constructions ou modèles mathématiques apparaissent alors parfois comme des jouets, inoffensifs, initiatiques et curatifs, avec lesquels les hommes peuvent faire travailler leur imagination, se donner de l'importance et une raison d'être, construire des mondes parfois baroques, dévoiler les fantasmes qui peuplent leur esprit et dont ils se délivrent par le jeu. Sans doute ces jouets n'ont-ils pas exactement les mêmes fonctions chez les adultes et chez les enfants. Mais les uns et les autres partagent à leur égard des réactions communes dans la mesure où ils pratiquent les mêmes opérations mentales et de la même manière.

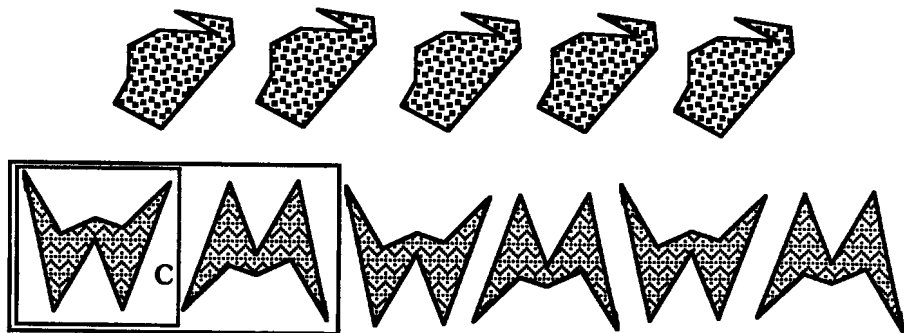
Ces réactions, parce qu'elles sont d'ordre affectif, marquent les individus : découragement et parfois rejet de la part de ceux qui éprouvent quelque difficulté, quelles qu'en soient les raisons, à comprendre et interpréter le discours mathématique, enthousiasme au contraire de la part d'autres, tenaces, stimulés par la difficulté à

vaincre, joyeux de l'avoir surmontée, excités par le merveilleux d'une démonstration où la perfection du raisonnement n'a pas voilé l'éclat de l'étincelle divinatoire, épanouis enfin par la beauté de la perspective des théorèmes réunis en une théorie harmonieuse.

Une bonne intelligence des programmes donnerait à chacun la possibilité d'éprouver ces plaisirs de l'intellect qui contribuent à la stabilité psychique des individus. Les mathématiques ont, par ce rôle affectif, une pertinence psychologique particulière dans l'insertion de l'être au sein de la société. Il n'est pas exclu qu'à l'avenir ce rôle ne devienne plus important.

L'homme trouve son équilibre dans la chaleur de la diversité protectrice, où règne, selon Héraclite, « une harmonie des tensions opposées ». Le cadre visuel d'autrefois, fixé par l'œil des peintres, était plus le fait de la nature que celui des hommes. Il est vraisemblable que le paysage visuel de demain sera davantage l'œuvre de l'homme, et que, dans ce nouveau monde, la richesse de la combinatoire assurera la diversité requise, alors que les symétries de formes et de dispositions continueront de révéler la présence d'équilibres internes de forces, peut-être fictives, exerçant autour d'elles une action apaisante.

L'œuvre artistique, qui flatte les sens et apaise l'âme, réunit la vitalité réjouissante de la couleur, la vibration émotive des sons, les propriétés charnelles des formes, dans un univers d'équilibre. Il se trouve que l'objet mathématique est en général une œuvre d'art conceptuelle, que les moyens techniques d'aujourd'hui permettent de rendre visible, manipulable, presque palpable par tout un chacun. Ainsi, le groupe cristallographique élémentaire que constituent les frises et qui possède sept éléments, est évidemment entièrement représentable en couleurs sur un écran d'ordinateur ou sur une feuille de papier. Voici une représentation figurée du premier et du dernier élément du groupe :



Par ce biais de la représentation matérielle, les mathématiques permettent de créer autour de chaque personne un environnement local, peuplé de beaux objets, et donc favorable à l'épanouissement de l'être.

Dans cette optique un peu futuriste, la pertinence des mathématiques ne concerne plus seulement la représentation et l'intelligibilité du monde, la formation intellectuelle des jeunes gens, mais aussi, par le contact permanent avec l'expression artistique des objets mathématiques, le précieux maintien de l'équilibre individuel dans un monde où l'être est souvent impuissant devant les facéties des tourbillons quelquefois cartésiens du ciel et de la vie.

Chapitre II

La mathématique, science expérimentale ?

Est-il sensé d'aller, apparemment, à l'encontre des bons auteurs ? Dans *La Science et l'hypothèse*, Henri Poincaré écrit : « On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie ; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale. » Et il consacre un chapitre entier à étayer ce propos.

Si donc la géométrie elle-même n'est pas une science expérimentale, il est certain que les mathématiques en général ne peuvent l'être.

Naturellement, le propos de Poincaré est lié à sa définition précise d'une discipline expérimentale : son objet est la matière, le tangible, le concret. Avez-vous déjà rencontré en effet un géomètre en train de construire et de manipuler dans un laboratoire un système optique pour essayer de découvrir un nouveau théorème de géométrie euclidienne, sphérique, ou mieux hyperbolique, dont il publierait l'énoncé par exemple dans un journal de mathématiques expérimentales ? La question fait sourire.

Or un tel journal existe. Est-ce donc un journal d'ignorants ou d'humoristes ? Plein d'humour, probablement. Ignorants ? Certes pas : des médailles Fields figurent dans son comité éditorial.

Doit-on alors penser qu'ont poussé de nouvelles branches des mathématiques qui méritent le titre d'expérimentales ? Non. La réponse serait-elle à trouver dans un élargissement implicite de la définition de science expérimentale ? Nous allons reconnaître que, comme les sciences expérimentales, les mathématiques sont une science de représentation et d'observation, une science de manipu-

lation, une science hypothético-déductive, une science de preuves. Mais on verra bien sûr que les mathématiques possèdent des caractères spécifiques, qui les différencient des sciences proprement expérimentales.

LA MATHÉMATIQUE, SCIENCE DE REPRÉSENTATION ET D'OBSERVATION

• *La mathématique, science de représentation*

Le propre de toute activité humaine impliquant la pensée est de représenter et en même temps d'observer : représentation et observation directe par les sens, ou au second degré par des artéfacts qui décuplent leurs pouvoirs ; représentation simplement mentale et souvent immédiate, ou bien représentation différée et réalisée sur des supports physiques qui la rendent visible.

Comme en d'autres domaines, la création, l'invention des représentations joue un rôle des plus importants dans le progrès des mathématiques. Ces représentations se font à trois niveaux.

Le niveau mental, le premier, fondamental, s'établit par le prolongement de l'activité sensori-motrice. C'est à ce niveau que le mathématicien travaille avant tout.

Le second niveau est le niveau physique : sable et doigt, papier, carton et crayon, écran et souris sont les instruments des représentations à ce niveau. On rendra hommage, en passant, au rôle majeur que joue la technologie ; la création du matériau malléable, argile, métal, verre, a permis celle d'objets ; l'invention du papier, du compas, de l'ordinateur, a facilité la découverte de formes insoupçonnées. Cette représentation appelée « dessin », qu'il soit mental, sur papier ou sur écran, a joué et continue de jouer un rôle considérable dans le développement des mathématiques. Le dessin scriptural est d'abord une aide au dessin mental. Il supplée au défaut d'inattention de l'esprit due à une instabilité interne, il permet de fixer une image mentale, de l'analyser, de la faire évoluer. Le dessin sur ordinateur joue lui aussi ce rôle de fixation de l'image et d'aide à l'observation et à l'analyse.

Le niveau abstrait est le troisième : on utilise ici comme supports de la représentation les objets mêmes fabriqués par les mathématiciens. Que l'on se rappelle l'impulsion extraordinaire donnée au développement des mathématiques par l'introduction de la représentation numérique des données géométriques, et dont l'étude est appelée « l'analyse ». D'autres exemples de modes de représentations ayant eu une grande portée, celui, algébrique ou analytique, des

nombres, celui des fonctions par des séries de fonctions élémentaires, polynomiales ou trigonométriques, celui des groupes, bien que moins connus du grand public, sont constamment présents à l'esprit du mathématicien.

Ces représentations sont tout à fait analogues aux outils de détection et d'observation du physicien, sans lesquels la physique ne se serait pas développée.

• *La mathématique, science d'observation*

Toute science est science d'observation, personne n'en doute aujourd'hui. Il a certes fallu convaincre les néophytes que la science mathématique ne dérogeait pas à la règle, et, de temps à autre, un mathématicien éprouve le besoin de le rappeler. Par exemple, dans un ouvrage paru en 1973 et intitulé *Sur la nature des mathématiques*, j'ai consacré un paragraphe à le faire, citant notamment un propos très clair de Charles Hermite au siècle dernier : « On peut néanmoins, à l'égard des procédés intellectuels propres aux géomètres, faire cette remarque très simple, que justifiera l'histoire même de la science, c'est que l'observation y tient une place importante et y joue un grand rôle. Toutes les branches des mathématiques fournissent des preuves à l'appui de cette assertion, mais je les choisirai de préférence dans l'une de celles qu'on regarde comme plus abstraites, je veux parler de la théorie des nombres. » Les passages essentiels ont été soulignés par Hermite.

Deux questions intimement liées se posent ici : qu'observe le mathématicien ? L'observation se fait-elle directement par les sens ou par des instruments appropriés ?

L'observation s'effectue en premier lieu sur des objets particuliers, appelés « exemples ». Ils sont de quatre types : les premiers sont de nature physique comme les solides, leurs ombres portées, leurs trajectoires ; on observe d'abord les formes des objets, leurs propriétés métriques, leur organisation. La géométrie est d'abord l'étude, pratiquement statique, des propriétés des ombres portées des objets de l'espace, éclairés par une source lumineuse située à distance infinie (géométrie affine) ou finie (géométrie projective). Ancienne ou moderne, elle apparaît ainsi comme une théorie physique d'un monde idéal. Notons que l'observation du monde physique conduit à la formulation des concepts les plus profonds des mathématiques ; ils sous-tendent l'activité technique des mathématiciens. Le concept de vitesse a donné naissance à celui de dérivée, le concept de force à celui de vecteur, les concepts de volume et d'énergie locale se sont fondus dans le concept de forme différentielle, la

stabilité des objets physiques, leurs comportements en situations critiques sont à la source des notions d'équivalence, d'invariance ou plus finement de stabilité, de bifurcation, exploitées de manières très diverses et sous des appellations différentes dans les différentes branches des mathématiques. C'est encore l'observation des états physiques qui suggère les grands théorèmes, comme celui attribué à Thalès, comme celui de Stokes qu'aurait voulu démontrer Bourbaki. Issue de l'électrostatique, la théorie de Morse a permis de faire de grands progrès en analyse différentielle. Aujourd'hui, ce sont encore les idées des physiciens théoriciens qui stimulent le développement de la géométrie, celui, par exemple, de la théorie des nœuds.

Les objets du second type soumis à l'observation, de nature locale, sont représentables sur un support physique, comme le sable, le papier, un écran. Les objets du troisième type, souvent issus, par généralisation, des objets physiques n'admettent que des représentations mentales partielles. Donnons comme exemples élémentaires de tels objets celui d'une boule ouverte dans un espace euclidien de grande dimension, ou de la bouteille de Klein comme espace-quotient du plan par le groupe discret engendré par une translation et une symétrie glissante. Les objets du dernier type, de nature locale ou globale, symbolique ou structurelle, n'admettent pas de telles représentations physiques. On ne peut pas montrer un groupe abstrait, mais seulement, parfois, une réalisation de ce groupe par des transformations qu'il opère sur un autre objet mathématique. Le nombre transcendant admet une définition seulement formelle, de sorte qu'on ne pourra jamais le montrer physiquement, mais seulement, dans certains cas, en donner une représentation numérique approchée sous forme d'une liste de chiffres qui réalisent un dessin spécifique, voire lui associer une représentation géométrique, par exemple une courbe particulière, comme un cercle ou une exponentielle.

La visibilité des objets mathématiques s'accomplit également à plusieurs niveaux. Le niveau fondamental est celui de la visibilité morphologique, au caractère statique, celle que nous apportent l'objet physique ou bien le dessinateur, le peintre, l'ordinateur.

Le second niveau est celui de la visibilité structurelle, au caractère beaucoup plus dynamique, qui met en évidence les processus génératifs des objets, de leur organisation, de leurs propriétés. C'est de ce point de vue, moderne et actif, qu'on présente aujourd'hui le corps des connaissances mathématiques. Il y a là un problème de pédagogie que le prochain chapitre abordera.

Rappelons simplement ici que le développement et le fonctionnement de la pensée ont leurs règles qui ne sont pas sans rapport

avec le comportement spontané du substrat biologique. Méconnaître ce point évident, ou en faire fi, ne peut que conduire à l'échec, ce qui arriva à certains émules de Bourbaki, qu'ils soient pardonnés. Dans sa phase initiale, tout développement est passif, réceptif : cette phase première est celle de l'acquisition de l'énergie en même temps que celle de la structuration de l'être, qui lui permettront plus tard d'agir. La phase passive de la pensée est celle de l'enregistrement des données, de leur rangement et de leur structuration dans notre boîte pensante. À ce premier stade de développement, où l'être humain utilise principalement ses sens pour reconnaître le monde, c'est la visibilité morphologique qui joue le rôle principal dans la formation de l'intelligibilité. Le mathématicien, comme tout homme de savoir, quel que soit le niveau auquel on se place, passe par cette phase d'observation morphologique et statique des apparences, des dessins, des écritures qui font l'objet de sa première lecture du monde.

Pendant cette phase passive, la science est certes une science d'expériences vécues, mais elle est peu expérimentale dans la mesure où ce n'est pas l'homme qui est l'agent de modification des données. L'observateur rationnel se contente de recenser les faits apparents, d'accumuler les données, de les organiser. Il fait de la taxonomie.

LA MATHÉMATIQUE, SCIENCE ACTIVE

En quel sens l'objet mathématique est-il un objet d'expérience ? L'expérience dans une discipline proprement expérimentale vise à dévoiler la structure intime de l'objet, et à faire apparaître ses caractères spécifiques, son mode de génération ; elle cherche à reconnaître et à justifier les différentes transformations qu'il peut opérer, individuellement ou bien au sein de complexes plus vastes. Ce programme n'est-il pas également celui qui est suivi dans l'étude de toute classe d'objets mathématiques ?

La science entre dans sa phase expérimentale lorsqu'elle commence à agir sur les objets de son étude. Cette phase est de nature dynamique. Elle concerne deux aspects essentiels de la science : la découverte de faits et leur explication. Réservez pour plus tard la question de l'explication en mathématiques, et intéressons-nous ici au seul problème de l'observation dynamique qui conduit à la découverte.

Cette observation est le résultat de manipulations opérées sur les objets mathématiques par l'intermédiaire de leurs représentations souvent multiples, la manipulation profonde étant celle que le mathématicien réalise sur les représentations mentales des objets.

En tant qu'idéalités, les objets mathématiques nous sont en principe inaccessibles. Mais pensons par exemple au point, nous en avons des descriptions linguistiques, symboliques, formelles, voire physiques, à partir desquelles nous élaborons des représentations mentales, ou bien qui les révèlent. Nous en avons aussi, souvent, différents modes de description et de représentation mathématique : ainsi au cours de l'ouvrage, le lecteur découvrira l'existence de plusieurs « modèles » de la géométrie hyperbolique. Chaque représentation permet d'observer les objets sous un jour particulier : certaines propriétés se font voir plus facilement par l'emploi de telle représentation plutôt que de telle autre ; en ce sens, la représentation devient un outil de découverte.

Plus le mathématicien devient familier de ces diverses représentations plus ou moins abstraites, plus elles s'incarnent dans le cerveau sous forme de représentations mentales. Souvent même, le mathématicien ne dispose que de représentations de ce type ; on ne voit pas, par exemple, et en général, le répondant physique des groupes de cohomologie, de leurs coefficients. Mais c'est principalement au niveau de la construction des représentations, de la découverte et de la démonstration des propriétés que l'on opère sur les représentations mentales. L'élaboration d'un raisonnement implique la mise en jeu d'hypothèses, de données et de relations de causalité ; il arrive qu'on puisse établir ce raisonnement sur la base de l'observation immédiate et physique. Cependant, en général, ce raisonnement s'établit sur des bases dites abstraites, dont on connaît certes le lien d'origine avec la réalité concrète, mais qui ont acquis une autonomie propre. Les propriétés des objets mathématiques, mises en relation les unes avec les autres, conditionnées les unes par les autres, font apparaître d'autres propriétés saillantes : leur description s'accomplit par des actes linguistiques gouvernés par une activité qualifiée ici encore de sensori-motrice, mais essentiellement interne au cerveau, dirigée vers le monde mental. Dès qu'on vise à la généralité, en particulier dès qu'on s'éloigne des situations courantes où le nombre est petit, la dimension faible, dès qu'on franchit le seuil de la quatrième et même parfois de la troisième dimension, la visibilité physique s'atténue, et il est nécessaire, au moment de la démonstration, de faire appel à des procédures algorithmiques, exprimées en termes numériques ou algébriques, et qui traduisent des transformations opérées sur les représentations mentales des objets mathématiques.

De la même façon et plus simplement, la représentation scripturale, sur papier ou sur écran, permettant à l'attention de se pencher sur les propriétés plus ou moins cachées mais inscrites et figées

dans le dessin, devient un instrument d'observation ; comme nombre de découvertes résultent d'observations soutenues, la représentation elle-même, autant que l'outil par lequel on parvient à la réaliser, accède alors au statut d'instrument de découverte.

Le rôle de l'ordinateur dans la découverte, moins souvent d'objets que de propriétés, est maintenant bien connu. Il permet ainsi d'obtenir des dessins, par exemple ceux de surfaces dites minimales, que l'imagerie mentale ne parvient pas à produire ; il permet de réaliser des manipulations commandées, entre autres des calculs, que l'esprit humain ne peut, souvent, effectuer en un temps acceptable. Certains en viennent même à se demander si, dans un futur proche, tout mathématicien ne sera pas obligé d'utiliser, à un moment ou à un autre, l'ordinateur comme instrument de découverte. Des exemples de telles réussites existent en effet par dizaines, probablement maintenant dans toutes les branches des mathématiques, celle des équations de récurrence étant la plus populaire, qui donne naissance à toutes ces belles images fractales. Voici un exemple emprunté à la géométrie élémentaire. Il existe des procédures simples pour construire à partir d'une configuration donnée, disons la configuration de Pappus ou un pentagone, une autre configuration du même type. Ainsi, dans le premier numéro du *Journal of Experimental Mathematics*, l'un des auteurs, R. Schwartz, énonce le théorème selon lequel deux pentagones construits selon la bonne procédure sont projectivement équivalents, et il ajoute : « J'ai découvert ceci expérimentalement, et ce fait est facile à démontrer par l'algèbre. »

Peut-on établir une typologie des manipulations entreprises par le mathématicien ? Comment même le mathématicien en vient-il à concevoir ces manipulations ? Les deux questions sont liées, et très ouvertes. Commençons par aborder la seconde d'entre elles. Nous distinguerons les manipulations à fin probatoire et celles à fin de découverte, qui nous intéressent dans ce paragraphe. Ces dernières procèdent souvent par analogie avec des situations déjà connues. Si elles sont constructives, et ce sont souvent les plus fécondes et les plus novatrices, elles reproduisent fréquemment, de manière idéalisée, des procédures naturelles des règnes physique ou biologique. L'une des méthodes fréquemment utilisées consiste, dans un premier temps, à rechercher des caractères extrémaux, des objets extrémaux, des situations symétriques, tous présentant un aspect singulier, puis dans un second temps à s'en écarter insensiblement, à les déformer. Prenons l'exemple, en géométrie affine, du théorème célèbre affirmant que concourent les hauteurs, médianes et bissectrices d'un triangle quelconque. Cette situation s'observe dans le cas singulier

d'un triangle équilatéral, où le théorème est évident par suite de la symétrie de la figure. Le théorème persiste lorsqu'on déforme la figure (de manière bien sûr qu'elle reste un triangle). La démonstration du théorème – nous en verrons plus loin l'intérêt général – consiste à plonger la figure déformée et la figure parfaite dans un espace de dimension plus grande qui les contient, de sorte qu'une projection dite parallèle d'une figure sur l'autre déforme les angles mais non les incidences entre droites.

Il arrive aussi que l'on parvienne à la découverte en procédant par analogie généralisante ; cette méthode conduit à apurer l'exemple soumis à l'examen, ce qui peut permettre de mettre en évidence des propriétés plus intrinsèques éclairant la présence de propriétés secondaires ; dans certains cas, l'étape finale de ce processus consiste à dégager un substratum plus fondamental et général. Par exemple, la création de la géométrie projective provient de la décision de ne plus considérer la source lumineuse seulement à l'infini : il apparaît alors qu'une des propriétés clés de cette géométrie est de conserver les alignements. Autre exemple très classique, celui de la découverte par Hamilton, au siècle dernier, des quaternions : il y parvint en cherchant une extension des nombres complexes par généralisation dans l'espace à trois dimensions habituel de leurs propriétés géométriques dans le plan.

Bien d'autres procédures de découvertes sont plus cachées, et, pour l'instant, incompréhensibles, notamment dans tout ce qui touche la théorie des nombres. Ayant évalué le nombre u_n des dispositions des points d'inflexion que pouvait présenter une courbe polynomiale de degré n , la décision fut prise, sans raison apparente, de fabriquer la différence $(u_{n+1}/u_n) - (u_n/u_{n-1})$; on vit rapidement, par le calcul à la main puis sur ordinateur, qu'elle convergait vers $2/\pi$, ce qu'on démontre. π a une signification géométrique intrinsèque liée au rapport des longueurs du cercle et de son diamètre ; ce que vient faire cette géométrie dans celle des courbes polynomiales reste un mystère total.

Peut-on comparer les manipulations des mathématiciens et celles qui sont pratiquées dans les sciences traditionnellement qualifiées d'expérimentales ? Dans ces disciplines, l'objectif principal semble être de comprendre la structure et la genèse, et, grâce en grande partie aux connaissances acquises en ces domaines, de pouvoir reconstituer les objets. Une méthode très souvent employée pour parvenir à ces fins est de séparer, s'il le faut de détruire, puis d'essayer de reconstruire. Si les mathématiciens partagent les mêmes ambitions, la situation se présente chez eux sous un jour légèrement différent ; ils travaillent en effet à l'intérieur de cadres

bien définis, dont la structure et la genèse ne font plus guère problème : les axiomes indiscutés les définissent en fait. Les princes qui gouvernent ce monde passeront ; par contre, la structure de groupe, et les axiomes qui l'établissent, peuvent être choisis comme symbole d'éternité. Mais les objets définis par les mathématiciens à l'intérieur de leurs cadres sont loin d'être connus dans toute leur étendue, et pour avancer dans cette connaissance, on emploie, comme dans les sciences expérimentales, différentes méthodes d'exploration, plus ou moins traumatisantes. Au siècle dernier, Riemann et Dedekind pratiquaient des coupures. Aujourd'hui, on emploie parfois des méthodes plus délicates. Par exemple, pour étudier localement la morphologie d'un objet on procède à un certain effeuillage : localement l'objet est vu comme une sorte de livre ; des feuilles, appelées strates, se raccordent entre elles le long d'une strate singulière ; on disperse ces feuilles en utilisant des procédures de disjonction plus ou moins douces et contrôlées appelées éclatements. Mais ces procédures ne peuvent se comparer par exemple à ces bombardements que pratiquent les physiciens nucléaires pour accéder à la connaissance de la structure intime de la matière. Il existe quand même, selon les disciplines, des manipulations spécifiques.

Le problème essentiel, mais évidemment bien difficile à résoudre, est celui de la découverte, dans un environnement spécifié, des raisons et des mécanismes mentaux qui déclenchent et agencent le processus de recherche de manipulations, grâce auxquelles de nouvelles propriétés peuvent être aperçues. Deux remarques banales concluront ce paragraphe. Décrire d'une manière réaliste et assez précise les mécanismes psycho-physiologiques qui accompagnent la genèse et la mise en route de ces diverses manipulations est évidemment, et pour longtemps encore, hors de notre portée. Mais il est clair que, du jour où une pareille reconstitution sera possible, l'homme, sous sa forme actuelle, sera amené à céder la place à une forme plus évoluée que la nôtre d'animal pensant.

LES MATHÉMATIQUES ET L'HYPOTHÈSE

Face à l'inconnu qu'elle cherche à pénétrer, toute science comporte évidemment une part conjecturale. L'homme de science est souvent comparable à l'aveugle qui, pour avancer, explore de ses mains, hume l'air ambiant, décèle le souffle d'air ou la source de chaleur. De vagues indices le dirigent : son expérience, ses capacités d'interprétation, un certain don de clairvoyance peuvent aider à le mettre sur le bon chemin. Ces mêmes atouts fondent l'intuition du

mathématicien. Elle l'oriente puis le guide sur une voie à suivre, vers un objectif dont la formulation peut encore être imprécise. Cet objectif, tant qu'il n'est pas atteint, porte le nom de conjecture : il s'agit d'une hypothèse dont il faut justifier la vérité ou la fausseté.

Nombre d'ingrédients implicites de nature méthodologique, conceptuelle, philosophique, peuvent entrer dans ce qui fonde l'expérience du mathématicien, et dans le choix de ses problématiques. L'ingrédient le plus classique, le plus commun, concerne la valeur de généralité de sa démarche, de son résultat, du problème sur lequel il travaille : celui-ci a-t-il simplement une valeur locale au sein d'un chapitre, ou au contraire, pour concerner tout l'édifice, une valeur absolue, ou bien, plus modestement, une valeur générique (presque toujours vrai à l'exception de cas singuliers) ? Il est clair que la réponse à cette question peut être source de travaux infinis, un exemple bien connu étant celui de la conjecture de Fermat. L'extension des nombres complexes est un autre exemple qui montre l'effet positif de la recherche d'une généralisation. De manière générale, toute obstruction rencontrée à une extension locale d'une propriété, ou toute rencontre d'une situation mettant en défaut une propriété locale, conduisent à la création d'une structure axiomatique affaiblie, mais de généralité plus grande, qui absorbe toutes les difficultés antérieures. Une grande part de la topologie générale, par exemple, est issue de ce genre de considérations.

La démarche analogique joue parfois un rôle important dans la formulation d'une hypothèse. Le terme « analogique » est utilisé ici dans un sens large ; parfois, le terme « comparative » serait plus approprié. Il peut s'agir du transfert d'une conjecture formulée dans certaines conditions vers un domaine voisin avec l'espoir que la solution y sera plus facile, et pourra donner des indications sur la solution de la conjecture initiale. On assiste ainsi parfois à la création de toute une chaîne de conjectures, la résolution de l'une engendrant celle des autres. L'histoire, enfin achevée, de la résolution de la conjecture de Fermat en est un bel exemple (issues plus ou moins directement de celle de Fermat, les conjectures de Mordell, de Serre, de Taniyama-Weil, sont parmi les plus connues, et aujourd'hui résolues ; l'échafaudage de la théorie a conduit à formuler bien d'autres conjectures). On devine que la résolution de la conjecture de Riemann, encore appelée « hypothèse de Riemann », qui porte notamment sur la position des zéros d'une certaine fonction $\zeta(s)$, sera plus difficile – cette conjecture de Riemann a suggéré à A. Weil, mais la suggestion n'a rien de trivial, d'autres conjectures dans le corps des nombres p-adiques, résolues par A. Weil lui-même et par Deligne.

En fait, chaque mathématicien a dans sa manche un lot de questions à résoudre, plus ou moins profondes, et donc de portées très variables. On dispose ainsi, en mathématiques, d'un corpus assez impressionnant d'« hypothèses » et de programmes pour tenter de les vérifier. Ce corpus s'enrichit sans cesse au point que de bons esprits, comme Jaffé et Quinn, pensent aujourd'hui créer un journal, chargé de présenter des conjectures étayées quand même par de solides arguments.

S'il advient qu'une telle hypothèse se révèle fautive, elle ne met nullement en cause le statut de la théorie mathématique à l'intérieur de laquelle elle se situe. Les résultats puissants de Gödel n'ont pas affaibli l'édifice mathématique. C'est là une première différence évidemment essentielle avec les sciences vraiment expérimentales, où il appartient à l'expérience de conforter ou de réfuter les assertions des théories et donc les théories elles-mêmes, ainsi, par conséquent, que les hypothèses souvent placées au cœur de ces théories.

LES MATHÉMATIQUES ET LA PREUVE

La distinction entre observateur et théoricien n'existe pas en mathématiques. L'observateur mathématicien tente aussi d'établir entre les faits qu'il a catalogués un chemin causal, appelé explication, preuve.

La recherche de telles explications est un moteur de la découverte de faits plus cachés. Deux propriétés apparentes se déduisent l'une de l'autre par la mise à jour de propriétés intermédiaires, d'un intérêt parfois secondaire.

Prenons un exemple très simple emprunté à la géométrie élémentaire. On montre par exemple que, dans le plan, deux triangles génériques étant donnés, on peut toujours trouver une inversion qui transforme l'un d'eux en un triangle semblable à l'autre. Les démonstrations les plus intéressantes sont constructives ; voici celle de l'assertion que l'on vient d'énoncer. S'il existe une telle inversion, on constate qu'une certaine propriété d'angle doit être vérifiée. De cette observation résulte qu'un intermédiaire de la démonstration cherchée est la construction d'un cercle, qu'on sait être le lieu des points d'où l'on voit un segment BC sous un angle donné. Comment faire cette construction, c'est-à-dire comment déterminer le centre O de ce cercle ? On se place naturellement dans le cas où la solution existe ; soit on est capable de travailler sur la représentation mentale, soit on a sous les yeux le dessin du cercle de centre O et passant par les extrémités B et C du segment donné ; un point A du cercle est

tel que \widehat{BAC} est l'angle donné. La manipulation consiste à déplacer le point A sur le cercle jusqu'à une position *singulière*, celle d'une situation déjà connue, dont on remarquera la symétrie interne : lorsque A est au milieu M de l'arc de cercle joignant B à C, le triangle MBC est isocèle, et les angles en B et en C de ce triangle sont égaux à $\pi : 2$ moins la moitié de l'angle donné. On peut donc construire le triangle MBC et le centre O du cercle qui lui est circonscrit.

Cet exemple est d'une grande simplicité : par le dessin, nous sommes en présence d'une représentation scripturale élémentaire, la manipulation que nous avons pu faire est également très facile à concevoir et à réaliser.

Nombre de ces manipulations probatoires consistent à procéder à des changements de points de vue, de position, de référentiel, qui permettent de placer l'observateur dans une situation qu'il connaît déjà, ou bien dans une situation simple où la constatation de la cause de la propriété qu'il cherche est quasi immédiate, plus généralement dans une situation singulière par rapport à la situation générique. Dans ce cas particulier, en effet, le fait est davantage patent, la démonstration plus facile à mettre en œuvre.

Par exemple, en géométrie, on peut étendre aux coniques les plus générales des propriétés qu'on démontre facilement sur le cercle. On peut démontrer de nombreuses propriétés de la géométrie projective en la déformant en une géométrie affine par expédition vers l'infini d'un sous-espace habilement choisi, par conséquent par le choix d'un centre d'observation bien situé, de sorte que les propriétés à démontrer apparaissent comme des conséquences simples du théorème de Thalès.

Cette technique de démonstration en géométrie projective est la traduction d'une méthode analogue en géométrie affine, qui consiste d'abord à quitter le petit monde dans lequel on est placé et à l'observer du point de vue de Sirius, de sorte que les arbres ne cachent plus la forêt. Cette procédure rappelle celle parfois pratiquée dans la vie courante : quand on ne peut résoudre un problème entre individus situés à l'échelon n , on s'adresse d'abord, pour démêler l'imbroglio sous-jacent, à celui qui est placé à l'échelon immédiatement supérieur $n + 1$.

La stratégie analogue de preuve, soulignons-le, ne déroge pas à la règle générale du changement de référentiel et de point de vue. Elle s'est souvent révélée très efficace. Elle consiste donc à plonger l'objet d'étude de dimension n dans un milieu de même nature mais plus vaste, de dimension au moins $n + 1$, de sorte que l'on puisse examiner l'objet à partir d'un point d'observation extérieur S , à distance finie ou infinie. J'ai évoqué précédemment comment, par cette pro-

cédures, on pouvait démontrer le théorème de géométrie élémentaire énonçant que les médianes d'un triangle avaient un point de concours. Les techniques de construction d'objets par suspension en topologie procèdent de la même démarche. Dans celle-ci, l'existence de l'espace de dimension supérieure est supposée exister. On peut postuler cette existence, on peut aussi construire cet espace, à la manière dont on construit les nombres. Le mode de construction de nombres en algèbre par extension est à la fois une technique assez extraordinaire d'invention et de preuve : si, sur les entiers, l'équation $2x - 3 = 0$ n'a pas de solution, je postule l'existence d'un ensemble plus vaste de nombres sur lequel l'équation proposée aura une solution, je note par $3/2$ cette solution et j'appelle rationnel un tel nombre.

Une telle démarche rappelle tout à fait celle qui a fait le succès des physiciens, n'hésitant pas à postuler l'existence de particules pour asseoir la cohérence de leurs théories, notamment en présence de faits expérimentaux nouveaux.

Mais si la validité d'une théorie physique est suspendue à sa confirmation par l'expérience, il n'en va plus de même en mathématiques. Elle se satisfait de sa cohérence interne, que l'expérience physique ou sur ordinateur ne peut justifier. L'exemple de la conjecture

de Mertens ($\left| \sum_n \mu(n) \right| < \sqrt{x}$ où n est un entier inférieur à x , $\mu(n)$ vaut

1 si $n = 1$, est nul si n est divisible par le carré d'un nombre premier, vaut $(-1)^k$ si n est le produit de k nombres premiers distincts) est significatif de la différence d'attitude que le mathématicien doit avoir par rapport au physicien : le calcul sur ordinateur montre la vérité de la conjecture tant que les nombres restent assez « petits », c'est-à-dire inférieurs à des nombres de l'ordre de 10^{70} . Le physicien aurait bien sûr conclu à la vérité physique de l'énoncé. Or la conjecture devient fautive au-delà de ces nombres. Vérité physique et vérité mathématique ne coïncident pas, cette dernière étant absolue. C'est évidemment là le point de clivage le plus fondamental entre mathématique et toute autre science expérimentale.

La mathématique exige la preuve mentale. D'aucuns diront peut-être « logique ». L'emploi de ce terme est profondément insatisfaisant. La cohérence du raisonnement mathématique est due à l'expression d'une causalité interne à l'univers mathématique, lequel provient pour l'essentiel d'une idéalisation de l'univers physique. Il existe par exemple en analyse différentielle un théorème clé dit « des fonctions implicites ». Il résulte de l'application, dans une situation un peu particulière mais importante, d'un autre théorème dit « des

fonctions inverses » ; manifestement, on le voit dans la « monstration » du théorème, la cause du théorème des fonctions implicites est ce théorème des fonctions inverses. Celui-ci affirme qu'un isomorphisme local défini par l'application linéaire tangente d'une application s'étend en un difféomorphisme local : on est en présence de deux objets en pâte à modeler, sans aspérités, et on établit une correspondance entre les points du premier et les points du second ; au voisinage d'un couple de points en correspondance, chaque objet lisse, dans un premier temps, est remplacé localement par son plan tangent ; ces plans sont supposés isomorphes, et donc de même dimension, ils ont mêmes propriétés topologiques ; puisque les objets sont bien lisses, on peut, par exemple, tout en respectant leur topologie, les déformer au voisinage de chacun des points considérés pour les faire coïncider avec leurs éléments tangents « plats » ; ainsi, par l'intermédiaire de leurs approximations « planes », les deux objets sont, localement, en correspondance bijective et possèdent les mêmes propriétés topologiques. Dans cet exemple encore, tout un ensemble de causes sont présentes qui justifient l'extension annoncée.

Le mathématicien maîtrise l'ensemble de ces causes, leur agencement particulier, qui peut faire que certaines propriétés paraissent plus significatives que d'autres. Le physicien, en général, pour qui il peut encore exister des causes inconnues, ou simplement cachées ou trop minimes, et dont il ne peut jauger l'influence à court, moyen ou long terme, ne domine pas toutes les causes ; même s'il peut, en première approximation, négliger l'effet de certaines, il ne les subit pas moins.

C'est assurément là un troisième point de divergence entre une science proprement expérimentale et la mathématique.

Nous avons rencontré, au début de ce chapitre, l'affirmation de Poincaré selon laquelle la géométrie n'était pas une science expérimentale. Une autre citation de ce même mathématicien aurait pu être choisie ; dans son ouvrage intitulé *Dernières Pensées*, il écrit : « La science [...] est et ne peut être qu'expérimentale. » La mathématique ne serait-elle donc pas une science puisque non expérimentale, ou au contraire serait-elle alors une science expérimentale ?

Récapitulons les points de convergence et de divergence entre la mathématique et les autres sciences dites expérimentales : elle est, comme ces dernières, une science de représentation et d'observation, une science de manipulation, une science pratiquant l'hypothèse, une science exigeant la preuve.

Mais, au contraire des sciences expérimentales, la réfutation

d'une hypothèse n'a pas de conséquence sur la théorie, la preuve présente un caractère absolu par le fait qu'en mathématiques toute la causalité est apparente.

Ainsi, bien que la mathématique présente assurément les attributs d'une science expérimentale, ses caractères spécifiques l'en démarquent radicalement. Les sciences expérimentales proprement dites dégagent et filtrent l'essentiel de la réalité tangible, et fécondent la pensée abstraite.

Chapitre III

Les leçons pédagogiques d'Henri Poincaré

Le développement formidable et merveilleux des mathématiques contemporaines, l'accroissement considérable du nombre d'élèves et d'étudiants ont créé ces dernières années, à quelque niveau qu'on se place, des chocs et des bouleversements dans l'enseignement des mathématiques, au point, parfois, d'en compromettre la qualité. Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner le contenu des manuels, de jauger les capacités des étudiants, et même le niveau de formation de certains jeunes enseignants.

Or l'importance intellectuelle et sociale des mathématiques est telle qu'on ne peut laisser les choses en l'état.

Il existe certes des commissions qui se penchent sur les questions d'enseignement pour tenter d'apporter des remèdes aux difficultés que l'on rencontre. Mais une sorte de manteau pudique les enveloppe : on ne sait rien en vérité de leur philosophie, ni même de leur composition. L'enjeu est pourtant tel que le débat mériterait d'être public, les décisions prudentes, et que les meilleurs et les plus anciens expriment leur opinion.

Ces quelques pages voudraient apporter une contribution toute modeste à ce débat, en faisant mieux connaître les quelques idées que Poincaré a formulées sur le sujet.

Ces idées n'ont pas été rassemblées en un corps de doctrine. Elles sont éparses dans son œuvre philosophique. On les rencontre notamment dans ses ouvrages, par exemple *La Science et l'hypothèse* ou *La Valeur de la science*, également dans trois articles : « Les fondements de la géométrie », paru au *Bulletin des sciences mathématiques* de 1902, « La notation différentielle et l'enseignement », et

surtout « La logique et l'intuition dans la science mathématique et l'enseignement », qui furent publiés dans *L'Enseignement mathématique*, au printemps 1899 et 1889 respectivement.

Ce dernier article, sur la logique et l'intuition, de cinq pages seulement, mériterait d'être proposé à la méditation de tout futur enseignant. Il est écrit avec une passion contenue. Sans doute Poincaré pressentait-il déjà le développement d'une tendance dont il a voulu, déjà, combattre l'extension possible. J'ai, pour ma part, la conviction que, si chaque enseignant était pénétré de ces conceptions, l'enseignement des mathématiques s'en trouverait mieux, même si, de toute façon, il restera délicat.

Les idées de Poincaré peuvent être rassemblées autour de cinq thèmes : les buts des mathématiques et de leur enseignement ; les rapports entre les mathématiques et les autres sciences ; les principes de la pédagogie ; les formes de la pédagogie ; les sujets d'enseignement.

LES BUTS DES MATHÉMATIQUES ET DE LEUR ENSEIGNEMENT

Dans *La Valeur de la science* *, Poincaré assigne aux mathématiques « un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout : elles ont un but philosophique, et j'ose le dire, un but esthétique ». À ces trois objectifs, il faut en adjoindre un quatrième ; peut-être, dans la pensée de Poincaré, était-il inclus dans le but philosophique, mais il est préférable de bien le mettre en évidence : ce but est pédagogique. Poincaré en fait mention dans son article sur la logique et l'intuition : « Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit **. »

Examinons un par un ces quatre objectifs.

• *Les mathématiques, instruments pour l'étude de la nature*

Poincaré a principalement développé ce thème à travers l'étude des liens entre les mathématiques et la physique. Notons ici que, dans l'étude de la nature, les mathématiques interviennent sur deux plans distincts : le premier est purement instrumental et technique,

* Flammarion, 1970, p. 104. Ouvrage référencé dans la suite par l'abréviation VS.

** « La logique et l'intuition dans la science mathématique et l'enseignement » (référencé dans la suite par l'abréviation LI), p. 132.

le second, plus subtil, se situe au niveau de la genèse de la compréhension et des pensées *via* la formation acquise par l'apprentissage des mathématiques. Nous reviendrons plus loin sur chacun de ces points.

• *Le but philosophique des mathématiques*

C'est là un thème que Poincaré n'explique pas du tout. Que faut-il donc entendre par objectif philosophique des mathématiques ?

Traditionnellement, les mathématiques sont à la source de deux types de problématiques : celles du premier type concernent la nature, la signification des mathématiques, la portée des concepts qu'elles déploient ; celles du second type se rapportent aux processus mentaux qui accompagnent le développement des mathématiques.

Les champs d'investigation de ces problématiques sont très vastes. Elles peuvent intéresser le mathématicien à certains moments critiques de sa vie professionnelle, notamment au moment où il doit faire un choix parmi des orientations possibles de travail, alors que les goûts spontanés méritent d'être étayés ou bien refrénés par des arguments de portée la plus large et la plus pénétrante possible. Jacques Hadamard, dans son *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, livre considéré comme un classique chez les mathématiciens, rappelle des exemples illustres et insiste, tout comme Poincaré, sur le rôle de l'esthétique comme guide et moteur de la recherche.

Mais l'intérêt de ces discussions dépasse largement le cadre des mathématiques ou celui de la philosophie en soi, de par les caractères des mathématiques, paradigmatique d'une part, universel d'autre part. Je citerai ici simplement à titre d'exemple cinq sujets de philosophie des mathématiques, qui présentent un caractère concret par leurs applications, et dont l'écho va bien au-delà de la seule mathématique : la procédure de représentation qui nous permet d'accéder à la connaissance, l'étude structurelle des problèmes, une procédure de démonstration qui consiste à plonger certains problèmes dans un cadre plus vaste, l'examen des rapports entre globalité et localité, à terme entre continu et discontinu, l'universalité de concepts comme ceux de stabilité, de singularité, de bifurcation.

Leur caractère transdisciplinaire, l'enrichissement qu'on en peut tirer tant pour la connaissance pure que pour l'action, devraient donner à ces sujets d'étude une place de choix dans la formation générale que tout un chacun se doit d'acquérir.

• *Le but esthétique*

Peut-on assigner aux mathématiques un but esthétique ? Cette question n'est pas non plus traitée en grand détail par Poincaré. Il est reconnu que les mathématiques apportent à l'esprit une joie rayonnante au moment de la découverte de faits nouveaux, plus simplement une satisfaction chaleureuse, un plaisir esthétique, où se mélangent clarté, ordre, sobriété, astuce et élégance. Obtenir un tel résultat psychologique est un signe mystérieux de qualité mathématique. En ce sens, rechercher la qualité esthétique est aussi, de manière implicite, viser la qualité scientifique.

Cet objectif esthétique est classique et, bien que parfois perçu par l'étudiant, plutôt du ressort du professionnel. Peut-on cependant, aujourd'hui, aller au-delà du cercle des initiés et faire partager à un public beaucoup plus large certains des bonheurs que rencontre le mathématicien dans sa vie professionnelle ?

Si l'on y parvenait, l'avantage pour les mathématiques ne serait pas négligeable. Car, si la stimulation des affects esthétiques venait à abaisser certains obstacles psychologiques, l'adhésion générale à cette discipline qui donne l'accès aux études scientifiques et techniques les plus poussées serait considérablement renforcée. Le recrutement des enseignants de mathématiques notamment se ferait sur une base plus large, leur formation pourrait en être améliorée, ainsi que celle de leurs élèves. La nation tout entière pourrait profiter de cette élévation générale du niveau des connaissances mathématiques, et scientifiques par voie de conséquence.

Un programme d'enseignement conçu avec le souci de susciter chez l'élève l'admiration, l'émerveillement, rendrait donc les plus grands services. Un mathématicien m'a confié – ses parents en sont toujours restés surpris et il n'en a pas gardé mémoire – qu'en seconde probablement il se serait exclamé : « Comme c'est beau ! » La géométrie euclidienne apportait son lot de propriétés surprenantes, l'évidence des démonstrations, la clarté du raisonnement, le confort reposant de visiter un édifice lumineux, équilibré dans son architecture, solide dans ses fondations. L'harmonie de la construction mathématique ne peut laisser indifférent : encore faut-il que des programmes adaptés la fassent sentir.

Par ailleurs, les mathématiciens ont maintenant créé un ensemble d'objets d'une très grande richesse, que l'image ou la matière peuvent rendre sensibles, visibles, palpables ; ils sont aussi, par l'originalité et l'équilibre idéal de leur forme, d'une esthétique captivante. Mettre certains de ces objets à la portée des parents et

des élèves ne pourrait que susciter leur intérêt et parfois leur enthousiasme. Un projet au moins existe qui va dans cette direction ; on peut espérer que sa réalisation sera prochaine...

À travers ces considérations se dégage un nouvel objectif des mathématiques en tant qu'instrument de recherche d'objets artistiques nouveaux, en tant que facteur d'équilibre de l'individu au sein d'un monde entièrement façonné par la main et l'intellect de l'homme, où l'environnement de l'être humain n'est plus peuplé par les créations biologiques naturelles, mais par les constructions clonées des ingénieurs. Dans ce monde nouveau qui commence à étendre son emprise sur la terre et dans les cieux, l'homme, pour maintenir son équilibre psychologique, a besoin de l'exutoire de l'œuvre d'art pour y exprimer ses passions intimes, révéler quelques traits de l'organisation profonde de son être, et vibrer à la rencontre de ces œuvres qui rencontrent certains fondements de son architecture.

• *Le but pédagogique*

« Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit. »

Rappelons que les véritables objectifs de l'enseignement sont, avant celui de la préparation à un métier, la structuration de l'esprit et le développement de la sensibilité à travers l'acquisition de connaissances solides et d'exercices de jugement ou de raisonnements appropriés. Cet apprentissage est d'autant plus facile, d'autant plus réussi qu'il a été entrepris jeune.

Or les mathématiques, bien comprises, réalisent le tour de force d'être, simultanément et de manière dense, un outil de formation de l'esprit à l'analyse, à la synthèse, à la déduction causale, au raisonnement logique. Accessoirement, elles constituent un des meilleurs outils de représentation et d'intelligibilité du monde physique. « Accessoirement » également, contrairement à une opinion largement répandue mais fautive, elles forment l'esprit à l'observation, au même titre que la peinture par exemple : tous les mathématiciens l'affirment.

Je ne reprendrai pas ici l'explicitation de ces divers aspects, si bénéfiques, de l'enseignement des mathématiques. Car il en est un autre, peut-être le plus important, que j'ai passé sous silence, et sur lequel il conviendrait de s'étendre. Pour cela, commençons par compléter la citation de Poincaré : « Le but principal de l'enseignement des mathématiques est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel ; et

quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour compléter l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. Le praticien en aura donc toujours besoin, et pour un géomètre pur il doit y avoir cent praticiens.

Mais pour le géomètre pur lui-même, cette faculté est nécessaire ; c'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente*.

Plus loin, Poincaré revient à la charge : « Parmi les jeunes gens qui reçoivent une éducation mathématique complète, les uns doivent devenir des ingénieurs ; ils apprennent la géométrie pour s'en servir ; il faut avant tout qu'ils apprennent à bien voir et à voir vite ; c'est de l'intuition qu'ils ont besoin d'abord**.

Les mathématiques développent-elles l'intuition ? La question est évidemment très difficile étant donné que personne ne possède une définition complète de l'intuition. Existe-t-il une intuition ou des formes d'intuition selon les disciplines, de même qu'existent des dons particuliers ?

Je pencherais vers l'existence d'un pluralisme d'intuitions, en admettant toutefois qu'elles possèdent des ressorts communs, liés à la sensibilité et à l'équilibre de l'être, à des processus intimes de simulation et de construction mentale, au cours desquels se stabilisent certaines situations singulières, dotées en quelque sorte d'un certain charisme. Ces processus permettent de conférer à l'intuition une sorte de capacité de vision interne, propre à l'individu ; il est de ce fait assez délicat, sinon parfois impossible, de faire partager ces spectacles, ces intuitions.

Mais qui dit vision implique espace, et c'est là où entre en jeu l'intuition mathématique, traditionnellement liée à la perception de l'espace et du temps, comme l'a bien souligné Kant. L'intuition mathématique est d'abord une intuition géométrique, où l'on voit des objets, des propriétés de tracés, et où l'invention se manifeste par des actes dynamiques de construction : ils génèrent tout autant les propriétés nouvelles que les démonstrations de leur présence.

De là viennent que la géométrie classique d'une part, celle que l'on a pratiquée jusque vers les années 1960, et la topologie différentielle d'autre part sont des disciplines proposant des exercices mentaux particulièrement aptes à développer les ressorts de l'intuition.

Enfin, les mathématiques ont vocation à épurer les notions, les concepts, à faire ressortir l'essentiel de leur contenu, à les exemplifier. De là provient également une partie de leur pouvoir éclairant et

* LI, p. 132.

** LI, p. 133.

formateur, avec d'autant plus de force que ces concepts présentent des caractères d'implication universelle. Ils trouvent en particulier leur emploi chaque fois que les milieux et les phénomènes étudiés présentent des propriétés d'homogénéité et de régularité assez solides : dans ce cas, ils peuvent faire l'objet de représentations géométriques et dynamiques qui éclairent leur genèse, leur forme, leur évolution.

LES RAPPORTS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES SCIENCES

Ces rapports peuvent être examinés de deux points de vue, selon que l'on considère l'apport des mathématiques à ces sciences, ou, au contraire, l'apport des autres disciplines aux mathématiques. On se placera ici de ce second point de vue.

« Il faudrait avoir complètement oublié l'histoire de la science pour ne pas se rappeler que le désir de connaître la nature a eu sur le développement des mathématiques l'influence la plus constante et la plus heureuse*.

Et Poincaré de donner un exemple : « Les propriétés de la lumière et sa propagation rectiligne ont été aussi l'occasion d'où sont sorties quelques-unes des propositions de la géométrie, et en particulier celles de la géométrie projective, de sorte qu'à ce point de vue, on serait tenté de dire que la géométrie métrique est l'étude des solides et que la géométrie projective est celle de la lumière**.

Le point que je voudrais souligner ici est cette qualité de la mathématique de représenter des propriétés physiques que l'on rencontre dans l'espace et dans le temps ; la mathématique possède un caractère de physique abstraite, déjà souligné par Émile Picard***, contemporain de Poincaré. Elle trouve les fondements de ses constructions, l'origine de ses concepts et l'énoncé de ses théorèmes les plus profonds non pas dans la mathématique en soi, mais au sein du monde physique. À ce titre, la mathématique mérite d'être considérée comme la description d'un univers physique idéal. Naturellement, le soubassement du réel n'apparaît parfois qu'au second degré : l'algèbre, dans laquelle on pourrait ne voir qu'une œuvre abstraite de description formelle, est d'abord conçue comme une analyse structurelle des objets mathématiques premiers et des

* VS, p. 109.

** *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, 1968, p. 75 (référéncé dans la suite par l'abréviation SH).

*** Cf. son article dans l'ouvrage collectif *De la méthode dans les sciences*, Félix Alcan, 1928.

transformations qu'ils peuvent subir, et qui sont autant de reflets des objets et des événements du monde physique.

La géométrie classique, Poincaré vient de le rappeler, trouve son origine dans l'étude de la propagation rectiligne de la lumière, à qui l'on doit la notion de droite. Les propriétés de cette géométrie, où la source lumineuse est à l'infini, découlent du théorème de Thalès, qui est un théorème d'optique géométrique. En géométrie projective, la source d'éclairement est à distance finie, engendrant une version projective du théorème de Thalès.

De l'étude des solides, notamment des pierres précieuses et des cristaux, vient la notion de polyèdre et toutes les mathématiques consacrées à la manière de remplir l'espace de façon régulière.

De l'astronomie viennent les notions de cercle et de sphère, et de l'étude des sphères céleste et terrestre dont il faut faire la cartographie, proviennent les notions de base de la géométrie différentielle.

De la mécanique statique sont venues la notion de force et de vecteur, d'espace de vecteurs, la notion de travail et donc de produit scalaire, à partir duquel Riemann a pu définir la notion de métrique. De la mécanique dynamique sont venues les notions de vitesse et d'accélération, de quantités fluentes et de dérivées, d'espace tangent en tant qu'espace de phases, de forme différentielle. De la mécanique céleste est venue par exemple la décomposition des mouvements en translations et rotations. De l'électricité et du magnétisme sont venus les notions de boucles, de solénoïde, les théorèmes de conservation de Gauss, de Stokes, la théorie de Morse. L'hydrodynamique a donné naissance aux concepts d'invariants intégraux. La théorie de la relativité a contribué au développement de la géométrie différentielle, la physique quantique au développement de la géométrie non commutative. Et l'on sait le rôle que joue aujourd'hui chez les physiciens théoriciens contemporains par exemple la notion de nœuds, et l'impulsion qu'ils ont donnée à cette théorie aux applications ramifiées. On connaît aussi le rôle moteur en analyse qu'ont joué et jouent encore l'hydrodynamique et la mécanique des vibrations. C'est enfin également à la mécanique que l'on doit les développements des mathématiques inspirés par les concepts de stabilité et de bifurcation.

Il s'agit là d'un survol très rapide et bien incomplet de ce que la mathématique doit à la physique de manière directe. Ce tableau paraîtra d'autant plus incomplet qu'on ne pourra pas faire apparaître ici ce que la mathématique doit à la physique de manière indirecte. Car, comme le signale Poincaré dans *La Valeur de la science*, l'un des guides du mathématicien, comme d'ailleurs de tout homme

de science, « c'est d'abord l'analogie * ». Analogies de construction, de structure, de procédures de démonstration, de propriétés, le mathématicien les emploie souvent, consciemment ou non.

Il est difficile d'apprécier ce que la mathématique doit aux autres sciences que la physique, notamment à la biologie. Elle doit peut-être à celle-ci quelques concepts, en tout cas d'avoir mieux fait ressortir l'importance de certains d'entre eux. Notamment sous l'influence des géomètres Poncelet et Riemann, les termes d'homologie et de connexion, utilisés par les paléontologues au début du siècle dernier, sont rapidement entrés dans le vocabulaire des mathématiciens. Aujourd'hui, en attirant l'attention sur l'analogie entre singularité et centre organisateur, biologique ou social, les mathématiciens ont mieux fait valoir l'intérêt de l'étude des singularités. Dans l'ensemble cependant, le monde biologique est encore trop mal exploré et maîtrisé pour qu'on ait pu en extraire des objets mathématiques et des faits mathématiques nouveaux. La géométrisation de ce monde très complexe en est seulement à ses débuts. Hormis la biochimie de l'ADN où la topologie et la géométrie ont trouvé de belles applications, mais il s'agit alors davantage de biochimie que de biologie véritable, les modèles sont encore fort peu détaillés, souvent métaphoriques, et néanmoins, quelquefois, explicatifs.

PRINCIPES ET FORMES DE LA PÉDAGOGIE

Principes et formes de la pédagogie sont inséparables, les deux sujets doivent être examinés de manière simultanée.

Les recommandations pédagogiques de Poincaré sont au nombre de deux seulement. Mais quel poids ont-elles ! Très liées, on peut accéder de la première à la seconde par une graduation de pensées.

Elles sont placées sous le sceau de l'histoire. Parlant de la mécanique, la discipline intellectuelle la plus proche des mathématiques, Poincaré évoque « la genèse de la science, [...] indispensable pour l'intelligence complète de la science elle-même ** ».

Pour ce qui est des mathématiques, Poincaré adresse aux pratiques pédagogiques standard une critique sévère, justifiée par la même remarque de fond : « En devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les

* P. 38 ; voir également p. 106.

** SH, p. 153.

questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent *. » Et d'expliquer : « Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir **. » Poincaré insiste, poursuivant aussitôt : « Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit ? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par cœur. »

Le terme « comprendre » apparaît trois fois dans ce propos. Et la conclusion de Poincaré, à la lecture des ouvrages d'enseignement de mathématiques écrits aujourd'hui, serait de dire que lycéens et étudiants en général ne peuvent pas comprendre les bribes de théories qu'on tente de leur enseigner. L'échec de l'enseignement des mathématiques serait-il d'abord la conséquence d'une mauvaise présentation des théories mathématiques, sans justification d'une part, beaucoup trop formelle d'autre part, masquant les raisons qui ont présidé à leur naissance, à leur développement ?

Faut-il examiner les raisons psychologiques, sociologiques, scientifiques, qui ont conduit à cet état de fait ? Elles touchent certes les mathématiques en premier lieu, suscitant leur rejet, mais aussi d'autres disciplines.

Les raisons scientifiques sont à première vue des raisons de poids : elles servent cependant et souvent d'alibi à des raisons psychologiques et sociologiques de moindre valeur. Rappelons donc d'abord ces raisons d'ordre scientifique : la science évolue, s'est grandement enrichie ; chaque discipline bénéficie d'une meilleure compréhension interne dont l'enseignement doit tenir compte ; de plus, pour permettre à des esprits encore jeunes d'accéder aux théories récentes, pour leur culture générale, ou pour leur permettre d'entreprendre rapidement des recherches, il a paru nécessaire de trouver des modes d'exposition rigoureuse, dense et rapide des théories, *de pratiquer une ontogenèse de la science*.

Une ontogenèse peut être plus ou moins bien conduite, plus ou moins bien réalisée. Celle des mathématiques est conçue par nous ; il importe d'en réduire autant que faire se peut les défauts. Examinons donc d'abord certains caractères de l'ontogenèse. Qui dit ontogenèse dit projection, et comme le sait tout mathématicien, une

projection supprime des dimensions, une certaine richesse : en l'occurrence, bien de ces justifications et de ces démarches hésitantes de la pensée qui ont accompagné la maturation des processus de découvertes. Dans quelle mesure faut-il supprimer ces éléments de compréhension de la genèse des concepts et des résultats ? Qui dit ontogenèse dit également processus ritualisé, donc susceptible d'une description formelle, d'une présentation selon une « logique impeccable », selon les termes mêmes de Poincaré ; mais, si l'imposition de l'ontogenèse intellectuelle n'est pas adaptée au développement naturel de l'intuition personnelle, n'est-on pas en présence d'un processus de formation *d'où l'intuition est absente*, et qui perd, de ce fait, une grande part de sa valeur formatrice ?

Alors, à cause d'une ontogenèse mal conçue, l'argument scientifique, qui est de vouloir former rapidement les jeunes esprits aux théories modernes, se retournerait contre lui-même : à quoi bon en effet prétendre former l'esprit par les mathématiques et aux mathématiques par un procédé pédagogique fondé sur cet argument puisqu'en figeant l'intuition il faillirait à sa mission, décourageant l'accès à la culture générale mathématique, ne favorisant pas le développement de qualités dont le futur chercheur aurait le plus grand besoin ?

Il en est par ailleurs des mathématiciens comme du reste des hommes. S'ils ont bien, dans leur ensemble, l'esprit de géométrie en général plus accusé que celui de leurs semblables, il n'en reste pas moins qu'on y rencontre la diversité commune des caractères. Un exercice unique de certaines mathématiques peut révéler une forme d'autisme, de repli sur soi, de manque de réceptivité à autrui, de passion un rien craintive et pathologique. Si la recherche de la vérité est une démarche pour le moins de bon aloi, si la recherche de la rigueur est une exigence de qualité à la fois esthétique et scientifique, il arrive parfois que sa pratique se fasse au détriment de l'intuition. « Mais comment a-t-on atteint la rigueur ? C'est en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle *. »

La recherche de la rigueur est un exercice non point d'invention mais de finition. Cette recherche permet certes d'affiner les notions de base, mais ce n'est pas grâce à elle que ces notions profondes ont été découvertes **. Son intérêt est donc second. La rigueur peut être l'apanage de grands esprits, aiguisés, comme celui de Weierstrass. Il

* VS, p. 35.

** LI, p. 132.

* LI, p. 129.

** Je n'ignore pas le rôle joué par les travaux de Weierstrass dans les découvertes de Cantor.

arrive aussi que la rigueur soit la marque d'esprits soit naïfs, soit frieux voire craintifs, pratiquant une pédagogie fidèle à leur psychologie. Mais, comme le dit Poincaré, « la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement ». « Mes auditeurs ont-ils compris ? », telle devrait être l'interrogation principale du maître, capable de s'affranchir des tabous illusoire pour être mieux à même de faire passer son message essentiel.

La seconde recommandation pédagogique de Poincaré est très explicite. Elle est donnée dans chacun des textes suivants : « Les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science. Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer à tous les esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité* ».

Quel argument Poincaré peut-il invoquer pour étayer sa recommandation de refaire suivre aux débutants le long chemin, « parcouru lentement » par les fondateurs de la science ? Poincaré s'appuie sur le fait que l'homme est d'abord un être biologique, et que le développement mental de l'être est lié à celui d'une physiologie qui a ses lois. Les méconnaître conduit à l'échec, voire à la catastrophe sociale comme en témoignent toutes les tentatives révolutionnaires et malheureuses établies sur l'idéologie mal fondée de « l'homme nouveau ». « Les zoologistes prétendent que le développement embryonnaire d'un animal résume en un temps très court toute l'histoire de ses ancêtres des époques géologiques. Il semble qu'il en est de même du développement des esprits. La tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé celui de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune. À ce compte, l'histoire doit être notre guide** ».

Poincaré connaît donc la loi de Herder-Haeckel selon laquelle « l'ontogenèse récapitule la phylogenèse ». Il nous invite à la pratique d'une ontogenèse vraie et non point bâclée, voire plutôt inexistante.

Il est en effet aujourd'hui des pans entiers de l'enseignement des mathématiques où la pratique pédagogique de cette loi de récapitulation semble ignorée. On trouvera sans doute dans ce fait une seconde cause de la difficulté sinon de l'échec de l'enseignement des

* SH, p. 35.

** LI, p. 131.

mathématiques. Car une ontogenèse mal conçue ne peut conduire qu'au développement d'un être plus ou moins difforme et taré. Si de tels défauts affectent la part mathématique de l'ontogenèse culturelle, on ne peut s'étonner qu'elle suscite une forme générale de rejet. Seul le retour à des conceptions et des pratiques pédagogiques en harmonie avec les lois profondes du développement biologique de l'être peut réconcilier le public avec les mathématiques.

À la lumière de ces considérations, l'enseignement des mathématiques dans nos lycées apparaît aujourd'hui moins formateur que stérilisant. Le lien historique et conceptuel des mathématiques avec toute la physique classique, qui a puissamment contribué à fonder ces mathématiques, est insuffisamment montré : les définitions des notions et des objets tombent du ciel, abstraites, incompréhensibles au premier abord. Cet enseignement, souvent trop formel, « algébrisé », est sans rapport profond avec le développement historique des mathématiques. Il ne respecte pas les règles élémentaires de l'ontogenèse culturelle.

SUJETS D'ENSEIGNEMENT

Le logicien souhaitera un fort enseignement de logique, le probabiliste et statisticien un fort enseignement de probabilité et de statistique, l'algébriste un fort enseignement d'algèbre, l'analyste un fort enseignement d'analyse, le géomètre enfin un fort enseignement de géométrie.

Sur la question : quelle formation faut-il donner à l'esprit ? d'autres se détournent, la question étant trop... philosophique.

Poincaré s'est davantage interrogé sur la manière de conduire l'enseignement des mathématiques que sur son contenu propre. La situation des mathématiques à son époque était fort différente de celle que nous connaissons aujourd'hui. Il n'y avait pas de contestation de l'enseignement des mathématiques, ni de besoins urgents d'introduire dans les programmes les trouvailles récentes des chercheurs.

Il y avait un enseignement fondamental, celui de la géométrie euclidienne. Le propos de Poincaré visait principalement à prévenir des dérives dans la conception de cet enseignement, qui rendraient caduques ses vertus formatrices. À lire son article « Les fondements de la géométrie », on voit qu'il redoutait l'introduction d'un enseignement axiomatisé de la géométrie. Cela dit, ses longues considérations sur l'espace et ses rapports tant avec la géométrie et l'*analysis situs*, ses écrits importants sur les fondements de la géométrie où les

groupes de déplacements jouent un rôle central sont autant d'ouvertures sur des enrichissements possibles de l'enseignement des mathématiques. Mais jamais Poincaré n'évoque explicitement la possibilité d'introduire ces nouvelles données dans l'enseignement. D'une part, à son époque, elles sont trop récentes, encore insuffisamment exploitées ; on n'imagine pas les magnifiques édifices qu'elles vont permettre de construire. D'autre part, l'ontogenèse a ses règles, Poincaré les a rappelées ; il faut, en particulier, faire parcourir aux jeunes esprits le chemin parcouru par les fondateurs.

Examinons l'état de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire français, aujourd'hui. Par rapport à autrefois, afin de suivre le développement du savoir, le nombre de matières à enseigner s'est accru. Sans nul doute, les réformateurs ont dû débattre des avantages et des inconvénients entraînés par cet ajout de matières supplémentaires, fait en grande partie au détriment des matières classiques, puisque le temps est incompressible.

En mathématiques, on a, par exemple, introduit des enseignements de probabilité et de statistique. Si la notion de probabilité présente un intérêt métaphysique évident, la statistique, de son côté, au niveau où on peut l'enseigner au lycée, n'a aucun intérêt formateur ; elle n'est alors qu'une technique élémentaire de calcul qui ne peut avoir de place qu'à titre informatif.

On a fortement développé un aspect calculatoire, introduit de nouveaux rudiments d'analyse, la notion d'espace vectoriel et le langage des vecteurs, les groupes d'isométrie du plan euclidien. On y rencontre même la notion de projection parallèle qui fait partie de la bonne et vieille géométrie.

À lire ce programme, le mathématicien professionnel pourrait éprouver un sentiment immédiat de satisfaction. Oui, il aimerait que tout élève l'ait bien assimilé.

Mais il ne s'agit là que d'un rêve. Beaucoup de temps est passé à l'introduction de ces notions, de sorte qu'il en reste fort peu pour énoncer et démontrer suffisamment de théorèmes. On ne pénètre pas à l'intérieur d'une théorie au point de former l'esprit à une discipline. Un tel survol rapide ne permet pas d'ancrer la pensée pour qu'elle puisse éprouver le désir d'apprendre davantage. Enfin et surtout la part de la formation de l'esprit à la géométrie, qui est la *représentation intelligible de la physique du monde*, est insuffisante. Par leur pouvoir générateur et inductif, le calcul et l'algèbre sont des outils très puissants permettant d'effectuer d'énormes raccourcis dans l'établissement de valeurs et de propriétés, chaque fois notamment qu'on est en présence de procédures récurrentes. Mais l'intelligibilité n'est pas dans l'aptitude à calculer. Elle se situe certes dans

l'observation et la définition des règles structurelles, mais d'abord dans la création : des objets, de leurs représentations, de leurs modes de construction. Cette création est d'origine physique, et donc fondamentalement géométrique.

Par l'introduction du langage vectoriel et des groupes de transformations élémentaires, on a tenté de moderniser l'enseignement de la géométrie. Celui d'autrefois déroulait au fil des ans une véritable théorie : embrassant d'un seul coup d'œil cette construction, on formait par là l'esprit à la synthèse ; on l'exerçait aussi à l'analyse des situations afin d'étayer les affirmations par des preuves. Toute cette formation est largement absente de l'enseignement actuel des mathématiques, trop parcellisé, manquant d'ampleur dans son développement, éliminant tout obstacle dont la présence est source de réflexion et de progrès de la pensée.

L'enseignement d'autrefois était marqué par une manipulation spatiale et physique au niveau des énoncés, des démonstrations, des exercices : il y avait une grande part de *constructions*, tracés de droites, tracés de cercles, grâce auxquelles on pouvait voir les propriétés, s'en imprégner, les démontrer. On reprenait la démarche mentale de ceux qui les avaient découvertes. On se forgeait une intuition spatiale en même temps qu'on s'exerçait au raisonnement démonstratif. On activait les processus mentaux de la découverte : celle-ci est principalement le résultat de *constructions* inédites. La recherche de lieux géométriques fortifiait une démarche de l'esprit tournée vers une appréhension plus dynamique de la réalité physique.

Trop peu de tout cela reste aujourd'hui. Il suffit de comparer les ouvrages écrits par les mathématiciens d'autrefois, par exemple le traité de géométrie d'Hadamard, et, à l'exception d'un seul écrit par Coxeter et Greitzer, les ouvrages actuels destinés à l'enseignement, aussi réputés soient-ils. Passons sur l'introduction *ex abrupto* d'axiomes, sans références physiques ou justification, mode d'introduction que Poincaré n'appréciait guère. La citation suivante est un peu longue, mais il vaut la peine de la maintenir intégralement quand on connaît les prétentions de ceux qui voudraient remplacer les mathématiciens par des automates :

« Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la géométrie, d'appliquer servile-

ment ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourra ainsi construire toute la géométrie, je ne dirai pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans rien y voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au piano raisonneur de Stanley Jevons, et l'on en verrait sortir toute la géométrie.

C'est la même préoccupation qui a inspiré certains savants italiens, tels que MM. Peano et Padoa, qui se sont efforcés de créer une pasigraphie, c'est-à-dire une sorte d'algèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles ou des formules.

Cette préoccupation peut sembler artificielle et puérile ; et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement, et nuisible au développement des esprits ; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité *.

Le formalisme, et la sécheresse qui en résulte, sont les caractères frappants de ces ouvrages récents. On peut trouver la raison de cette belle froideur dans un souci de rigueur et de sobriété, dans le désir des auteurs de donner une présentation moderne et axiomatique de la géométrie par l'emploi d'un langage le plus algébrisé possible, celui de la théorie des groupes. La question dont on va débattre ici est la suivante : conviendrait-il de fonder, au niveau des collèves et des lycées, tout l'enseignement de la géométrie sur la considération exclusive des groupes de transformation ? Deux remarques de fond vont servir de base à la discussion.

Tous les résultats géométriques fondamentaux, significatifs, et d'ailleurs traditionnellement enseignés, ont été obtenus avant la naissance de la théorie des groupes. Fort peu de démonstrations primitives ont fait appel au concept de symétrie sous-jacent à ladite théorie. Au niveau élémentaire auquel on se place, le meilleur résultat établi par cette théorie est l'énoncé sur la structure des isométries euclidiennes, décrites comme produits de réflexions.

Les démonstrations anciennes sont vivantes et proches de la réalité physique. Le théorème de Thalès est un théorème d'optique que l'œil vérifie chaque jour. En géométrie élémentaire classique, la notion d'aire joue un rôle capital ; que de théorèmes, de manière directe ou plus lointaine, ne démontre-t-on pas à partir du calcul des

* « Les fondements de la géométrie », p. 95-96.

aires ! Les considérations domaniales, liées aux conditions de survie de l'être, ont quelque chose d'inné. Une démonstration utilisant la notion d'aire possède un caractère naturel qui la rend psychologiquement acceptable.

Les démonstrations anciennes sont pleines de charme. On y sent poindre l'astuce, on y retrouve l'éclair de la découverte. Les démonstrations modernes, quand elles sont données, sont des démonstrations de seconde main, respirant parfois l'effort pour couler les résultats anciens dans le langage nouveau. Elles manquent en général d'attrait.

La seconde remarque, c'est que la notion de groupe n'a rien de spontané. Rappelons d'abord qu'il a fallu attendre des millénaires avant que naisse cette théorie, difficilement, au siècle dernier. C'est le physicien Helmholtz qui a, le premier, entrevu le rôle de la théorie des groupes de transformation en géométrie ; F. Klein a aussitôt compris la portée de l'intuition de Helmholtz, et commencé, en 1872, à mettre en œuvre un programme de décodage et de retranscription. Un siècle plus tard à ma connaissance, en 1964, écrit par J. Dieudonné, apparaissait enfin un traité de géométrie élémentaire important, mais encore incomplet, fondé sur la théorie des groupes, et hors de portée des lycéens.

Aucun des grands esprits profonds des siècles passés, Archimède, Newton, Euler, n'a eu la moindre idée de la théorie des groupes et de l'exploitation de la notion de symétrie liée à cette théorie. Il a fallu attendre, nous venons de le dire, l'an 1872 pour qu'après une intense préparation scientifique un grand mathématicien comprenne véritablement la portée de la théorie des groupes de transformation, et un siècle encore de travail supplémentaire pour parvenir à rédiger des ouvrages à vocation pédagogique. C'est assez dire combien les démonstrations argumentées sur cette théorie, aussi simples nous paraissent-elles, sont en fait forcées, *peu intuitives*. Poincaré doit se retourner jour et nuit dans sa tombe : il est aux enfers *!

Des obstacles de fond se sont donc opposés à l'implantation de la théorie des groupes : celui-ci paraît essentiel. Il est probable que davantage on descend au cœur de la physique fondamentale, davantage l'homogénéité, la régularité, la stabilité et la symétrie sont présentes. Mais plus on s'éloigne de cet état physique, plus les ruptures de symétries se font nombreuses. Au niveau de notre perception spontanée toute biologique, la symétrie n'est pas perçue, tant est prégnante la flèche du temps, si l'on veut, sur notre physiologie toujours en devenir.

* Comme le signale l'éditeur : « Non, pas lui, nous... »

C'est sans doute la raison pour laquelle toute démonstration fondée sur le concept central de la notion de groupe restera, pour le jeune esprit encore plein de vitalité bouillonnante, artificielle, étrangère à sa sensibilité naturelle. La mécanique de sa pensée, point réduite à des comportements d'automate – rotations et translations sont l'affaire du cervelet et non pas des fonctions supérieures du cerveau –, ne se satisfera pas des démonstrations détachées des contraintes biologiques. Les démonstrations seront logiquement comprises, elles ne seront pas physiologiquement et affectivement assimilées.

Ainsi, le premier et le plus grand reproche apparent que l'on peut adresser à l'introduction précoce de la théorie des groupes dans l'enseignement, c'est d'être en contradiction avec le principe pédagogique clé : réaliser une ontogenèse de la connaissance qui en respecte la phylogenèse.

Au stade de développement où se trouve la pensée de l'enfant, la vision dynamique des choses fait encore défaut. On en reste toujours au niveau de la perception d'un monde stable et structurant, statique. L'esprit n'est pas encore capable d'analyser le passager, le fugace. Dans cette première phase de son développement, il commence par retenir les faits très routiniers. On remarquera que la science a suivi un processus d'acquisition tout à fait analogue. Or, pour bien comprendre le rôle des groupes en géométrie, il faut avoir développé au contraire une compréhension transformationniste du monde. Les éléments des groupes que l'on met en œuvre en géométrie élémentaire sont des *déplacements*, des *modifications* : translations, rotations, symétries, dilatations, transformations conformes. La question se pose de savoir vers quel âge en moyenne l'individu effectue la mue de sa pensée et devient capable de concevoir une dynamique de transformations. Car, s'il est évident que tout enfant est spontanément à même d'opérer les transformations élémentaires qui viennent d'être citées, la question reste de savoir s'il est assez mûr pour pouvoir en faire *consciemment* des outils rationnels de construction et de découverte en géométrie, c'est-à-dire dans des espaces soumis à des contraintes métriques.

Il serait sans doute préférable de maintenir en activité tout au long de la scolarité la simple capacité de représentation topologique et spatiale que les pédagogues ont observée chez les bébés et les tout jeunes enfants, en les alliant aux manipulations transformationnelles pratiquées de manière spontanée : l'emploi de la pâte à modeler ou de l'argile du potier, la manipulation plus tard d'objets déformables visibles sur écran d'ordinateur permettraient très tôt d'apprendre aux enfants d'une part à caractériser leurs gestes à l'aide

des transformations définies par les mathématiciens, en même temps et d'autre part à construire *dans l'espace tridimensionnel* usuel les objets métriques ou topologiques simples familiers au mathématicien, par les procédures non seulement métriques mais aussi topologiques (identification, ajout d'anses, voire fabrication de tresses).

La procédure *a priori* actuelle conduit à consacrer beaucoup de temps à la mise en place du cadre dans lequel on va présenter la géométrie : cadre tout à fait inhabituel, et donc difficile à assimiler par la majorité des élèves. On ne peut donc guère introduire que la translation, la réflexion, la rotation ; au moins pourra-t-on espérer captiver un moment les élèves avec l'étude de pavages du plan simples. Notons ici que la réalisation, depuis des millénaires, de frises d'une grande qualité artistique, où domine évidemment la symétrie, fournit la matière d'un contre-exemple au principe qui considère comme contraire à la phylogenèse de la connaissance l'introduction précoce de la théorie de la symétrie. La question qu'il convient de reposer ici est celle de savoir si la maturité du développement mental des enfants leur permet d'utiliser la notion de transformation comme outil de démonstration, et si la démonstration de l'existence de sept types de frises est un exercice susceptible de développer leur intuition.

Si la dilatation ou homothétie est également et bien obligatoirement présente dans tout enseignement de la géométrie, par contre, on ne parle pas, au niveau du secondaire, de la transformation conforme. On perd donc une grande part de ce qui faisait la richesse de la géométrie d'autrefois, et qui contribuait fortement à éveiller l'intérêt des élèves pour les mathématiques. Constatons que les étudiants abordent, aujourd'hui, les cours de géométrie de l'université en ignorant la notion de puissance d'un point par rapport à une courbe, l'inversion, la nature du lieu des points d'où l'on voit les extrémités d'un segment sous un angle constant. Bien des théorèmes excitants, aux démonstrations de surcroît faciles par les méthodes traditionnelles, ceux de Ceva, Ménélaus, Varignon, et même Pascal, ne sont pas connus. Les connaissances sur les propriétés des coniques sont des plus limitées.

Quant à la géométrie dans l'espace, on en fait si peu que les élèves semblent ignorer par exemple le mode de génération du plan dans l'espace usuel. La plupart ne semblent pas voir dans l'espace. Les conséquences de ce défaut de vision sont bien souvent dommageables pour la poursuite d'études supérieures.

Le bilan de ces réformes n'est pas très encourageant. On a assurément beaucoup perdu sur le plan de la formation de la pensée ; pour gagner en rigueur, n'a-t-on pas tué l'intuition ? Quant au gain en connaissance mathématique, il n'est pas prouvé : au contraire, on

a perdu la connaissance de beaucoup d'énoncés classiques mais importants, sans avoir vraiment acquis une familiarité un peu approfondie avec des notions modernes. Enfin, cet enseignement peu ontogénétique paraît souvent artificiel, et susciter un sentiment de rejet de la part d'une large fraction d'élèves, sentiment que, devenus adultes, ils continueront sans doute à manifester. Ces élèves ainsi formés entrent à l'université. Que leur offre-t-on ?

En premier lieu, un enseignement de plus en plus spécialisé. La notion de culture générale est absente de l'enseignement universitaire, un comble si l'on songe à la présence de la notion d'universel dans le mot universitaire. Le diplôme universitaire d'études générales n'a en effet de valeur générale que le nom, tant, en certains endroits, la spécialisation est poussée dès la seconde année. Même la physique est ramenée à la portion congrue ; on fabrique des spécialistes de seconde zone, dont l'ouverture d'esprit n'est pas encouragée. Les programmes de licence et de maîtrise de mathématiques ne comportent que des enseignements de mathématiques. Que pourront comprendre ces futurs enseignants à la genèse de leur discipline s'ils ignorent la physique ? Comment, s'ils veulent faire des mathématiques appliquées, pourront-ils utiliser une compréhension et une intuition physiques pour trouver des énoncés significatifs ? Quant à la présence de disciplines littéraires au sein d'enseignements scientifiques, il n'y faut point compter. L'université aurait-elle pour fonction de former moins des honnêtes hommes que des machines techniciennes ?

Nous avons déjà relevé que les étudiants qui entrent à l'université n'ont pas, en général, de vision spatiale. On s'en aperçoit, par exemple, aux difficultés rencontrées par la plupart d'entre eux pour assimiler l'algèbre linéaire, comprendre certains théorèmes d'analyse qui sont une traduction numérique de faits géométriques, ou bien la notion élémentaire de sous-variété paramétrée.

On donne souvent aux étudiants une fausse vision des mathématiques. On leur donne une vision non point spatiale, mais essentiellement *calculatoire*, numérique, où l'établissement de la formule supplante le raisonnement qui devrait expliquer la raison de la formule, la faire deviner. L'enseignement de la topologie différentielle est absent, celui de la géométrie réduit à la portion congrue : les étudiants ne sont pas formés à concevoir le calcul comme la traduction numérique de faits géométriques, spatiaux, l'algèbre comme le plus souvent une description structurale d'opérations spatiales, soit directes, soit indirectes à travers le nombre. Il appartient aux protagonistes de ce « calculus » de mettre en valeur son apport, s'il existe, à la formation de la pensée.

Les enseignements que reçoivent les étudiants sont parfois trop formels : alors que l'algèbre linéaire n'est que la présentation déguisée de faits géométriques simples, on découvre souvent dans les ouvrages une présentation axiomatique et abstraite qui élimine complètement la réalité géométrique sous-jacente, tue *a priori* toute compréhension véritable de cette « algèbre ». Bien des ouvrages ignorent la signification géométrique d'un déterminant, ou font l'impasse sur la résolution géométrique d'une équation linéaire. De même, la présentation de la signification géométrique des théorèmes d'analyse est souvent esquivée ou fugace, de sorte que ces énoncés n'ont, pour l'étudiant, qu'une valeur linguistique. Il n'est pas étonnant alors que, par suite d'une incompréhension due à l'élimination de l'interprétation concrète et visible, le niveau général en mathématiques soit peu élevé, qu'un faible nombre d'étudiants envisagent de poursuivre des études dans cette direction, et qu'on ait tant de mal à recruter des enseignants.

Ces difficultés ne peuvent qu'encourager la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Si les observations, les critiques et les jugements qui viennent d'être portés ont quelque fondement, les programmes devraient, à nouveau, être revus. Une indication générale se dégage des propos précédents : il semble nécessaire de renforcer la part de la géométrie dans tout l'enseignement ; au niveau du secondaire en particulier, en redonnant une vitalité nouvelle à l'enseignement classique de la géométrie, qui doit certes être modernisé mais de manière moins abrupte qu'on ne le fait aujourd'hui. À travers tous les cycles d'enseignement, il conviendrait de faire vivre un courant topologique et manipulatoire permettant, avant tout, d'entretenir et de développer l'intuition de l'espace, au sein duquel se déploient le monde physique, le monde vivant.

Ce propos pédagogique amène des considérations d'une autre nature. Sous l'influence des analystes, des mathématiciens appliqués et du développement de l'informatique, le numérique est devenu omniprésent. On ne peut contester son intérêt comme *outil de représentation*. C'est par lui, certes, qu'on représente la forme, voire l'espace. Mais de quel espace s'agit-il ? Qu'a-t-il réellement à voir avec l'espace physique, milieu étrange imprégné de l'une de ces entéléchies nommée aujourd'hui énergie, *anima* autrefois, et dont l'intelligence échappe toujours aux physiciens ?

Au siècle dernier, Maxwell et Poincaré demandaient à leurs contemporains de ne pas confondre « la formule et le fait » (Maxwell), « le symbole et la réalité » (Poincaré). Sans doute rencontraient-ils quelques personnes qui, fascinées en quelque sorte par leurs propres constructions mentales, attribuaient à celles-ci une

mathématiques
 esque absolue. Cette fascination les
 quel point leur perception du réel était mu-
 a monde de rêve. Leurs décisions pratiques, pris-
 aussi erronées, pouvaient conduire aux pires catas-
 -on craindre alors que, par une formation trop axée sur
 monde entièrement artificiel, oppressif, inhumain, étouf-
 sensibilité, tuant toute âme ? Cette vision est certes exces-
 laissent entrevoir un univers concentrationnaire d'une
 ance et d'une efficacité sans commune mesure avec les réalisa-
 monstrueuses d'un passé récent.
 Dans la réaction si fréquente de désaffection voire de refus des
 mathématiques, ne se glisserait-il pas une sorte d'appréciation assez
 ne sur les possibilités réelles que possède cette discipline à
 atteindre le fondement affectif de l'humain, également une sorte de
 science inconsciente face à la perspective d'un monde déshumanisé,
 science mathématique, dans son apparence de mécanique
 trait le froid symbole ?

Existe-t-il, dans le processus de la découve-
 une part d'irrationnel ?
 La réponse à cette question est bien sûr très comp-
 leur importance ? Comment reconnaître les soubassements rationnel-
 nalité apparente ?
 Ma conviction est que la rationalité est prééminente. Elle e-
 borée à plusieurs niveaux. La rationalité achevée trouve son c-
 ceux-ci, pour justifier un fait, présentent une suite causale d'
 irréfutables. Un fait non justifié par cette procédure e-
 axiome qu'un consensus accepte de tenir pour base d'é-
 canon précèdent, ou bien à infirmer.
 Les faits justifiés, s'ils conservent tout leur inté-
 nent quand même au passé. Les faits à justifier peu-
 certains d'entre eux, relever du passé : la conjonct-
 énoncée dans une lettre à Euler en 1742 – tout ent-
 ombres premiers –, celle sur la position des
 $\sum \frac{1}{n^s}$, ou « hypothèse de Riemar-
 des exemples fameux, puis
 à justifier relèven-
 urs qual-

ématiques

ne absolue. Cette fascination les ren-
point leur perception du réel était mutilée.
de de rêve. Leurs décisions pratiques, prises
i erronées, pouvaient conduire aux pires catas-

craindre alors que, par une formation trop axée sur
ne se répande l'idolâtrie du nombre, nous menant
nde entièrement artificiel, oppressif, inhumain, étouf-
sibilité, tuant toute âme ? Cette vision est certes exces-
que les avancées de l'ensemble des sciences et des tech-

issent entrevoir un univers concentrationnaire d'une
et d'une efficacité sans commune mesure avec les réalisa-
onstrueuses d'un passé récent.
ns la réaction si fréquente de désaffection voire de refus des
matiques, ne se glisserait-il pas une sorte d'appréciation assez
sur les possibilités réelles que possède cette discipline à
ndre le fondement affectif de l'humain, également une sorte de
conscient face à la perspective d'un monde déshumanisé,
ne mathématique, dans son apparence de mécanique
le froid symbole ?

Existe-t-il, dans le processus de la découverte
une part d'irrationnel ?
La réponse à cette question est bien sûr très compli-

l'importance ? Comment reconnaître les soubassements rationnels,
leur ordonnancement, qui débouchent sur l'expression d'une irratio-
nalité apparente ?
Ma conviction est que la rationalité est prééminente. Elle est éla-
borée à plusieurs niveaux. La rationalité achevée trouve son expr-
sion dans le discours élégant du mathématicien, du logicien r-
ceux-ci, pour justifier un fait, présentent une suite causale d'én-
irréfutables. Un fait non justifié par cette procédure est s-
axiome qu'un consensus accepte de tenir pour base d'élab-
canon précédent, ou bien à infirmer.

Les faits justifiés, s'ils conservent tout leur intérêt,
nent quand même au passé. Les faits à justifier peuvent
certains d'entre eux, relever du passé : la conjoncture
née dans une lettre à Euler en 1742 - tout entier r-
certains premiers -, celle sur la position des zéro-
 $\zeta \frac{1}{2}$, ou « hypothèse de Riemann »
exemples fameux, puisés r-
justifier relèvent d'ir-
qualifiés

gènes, l'observation des objets mathématiques, l'expérience acquise par l'observateur, et de facteurs plus personnels, plus innés, qualifiés non moins improprement d'endogènes, à savoir les qualités intellectuelles propres à l'observateur : intelligence et mémoire des faits et de leur organisation, rapidité de fonctionnement de l'esprit qui facilite les manifestations des deux premières qualités, intuition.

Les grands hommes ont ces qualités endogènes poussées à un très haut et rare degré ; on convient alors de parler de dons. Ils permettent à leurs heureux possesseurs, que Pascal considérait comme touchés par une grâce divine, de faire œuvrer les facteurs extérieurs avec une remarquable efficacité. Essayons de voir comment ils s'y emploient.

L'observation des objets mathématiques peut se faire à différents niveaux, et de bien des manières. L'objet mathématique en effet peut éventuellement être soumis à des modes de représentation et d'analyse variés : topologique, métrique, algébrique, analytique. La description de l'objet sous chacun de ces éclairages, ou sous la combinaison de certains de ces éclairages, apporte naturellement une part originale à son intelligence, à la mise en évidence de ses propriétés. Le souhait de retrouver ou d'exprimer les propriétés observées d'un premier point de vue à partir d'un autre point de vue joue un rôle stimulant qui permet de mieux préciser les qualités de l'objet, voire de faire apparaître une ou des qualités tout à fait singulières, voire de lui conférer un statut nouveau ou particulier. La question de leur universalité se pose alors : la réponse à cette question peut permettre de définir de nouvelles classes d'objets que l'on cherchera à caractériser de manière intrinsèque. Peuvent alors être élaborées des axiomatiques particulières, des théorèmes d'ordre général énonçant les propriétés communes des objets appartenant à ces classes.

Le propos qu'on vient de tenir décrit une large part de la création et du développement des objets et des champs d'objets mathématiques. Par exemple, la géométrie algébrique est initialement issue de la représentation analytique de courbes, principalement définies, encore aujourd'hui, par des polynômes. Nombre de propriétés géométriques, points d'intersection et contacts entre courbes, singularités, effets de transformations, ont été exprimées dans le langage des polynômes. Les propriétés géométriques ont suscité la découverte de propriétés structurelles des espaces de polynômes. Par ailleurs, l'étude de l'arithmétique, de l'organisation des espaces de nombres, où les polynômes jouent également un rôle important, a, elle aussi, contribué à la mise en évidence de propriétés structurelles des espaces de polynômes (la notion d'idéal, par exemple, vient de

l'arithmétique). L'algèbre est devenue le corps de théorie qui étudie ces propriétés structurelles, à travers l'étude d'objets ou de théories d'objets de même structure, qu'ils soient géométriques, numériques ou fonctionnels. En retour, les progrès de l'algèbre ont fortement influencé la manière de présenter et d'aborder les questions examinées dans les autres théories.

On voit bien, à travers ce survol très rapide et très partiel de la géométrie algébrique, apparaître deux des composantes très générales du processus de découverte : outre une compréhension aiguë de ses propriétés déjà établies, indissociable d'une familiarité très grande avec l'objet, le processus de découverte fait appel à une connaissance non moins sûre et non moins actuelle de domaines voisins, favorisant la possibilité de transferts de propriétés et de méthodes d'exploration.

De ce point de vue, la recherche en mathématiques n'est pas différente de la recherche dans les autres domaines, en physique ou en médecine par exemple. Dans ces deux disciplines, on procède essentiellement par exploration. Cette exploration peut se pratiquer *in situ* ; elle apparaît alors sous deux formes principales : une forme douce, l'auscultation, maintenant externe ou interne, accomplie sans destruction de l'objet d'étude ; une forme plus violente, relevant de l'esprit analytique, qui consiste à séparer, fragmenter, disséquer, extirper par des procédés proprement chirurgicaux, désarticuler, bombarder, détruire, annihiler. L'exploration peut aussi s'accomplir sur des images de l'objet, sur des *représentations* plus ou moins fidèles de cet objet ou de certaines de ses parties.

La manière dont procède l'auscultation en mathématiques dépend du chapitre que l'on considère. Le calcul des longueurs des trajets entre deux points, la présence de pôles associés aux fonctions méromorphes, singularités représentant des obstacles à éviter, à contourner, ont contribué à fortifier l'importance de la notion de chemin fermé et déformable, l'importance du concept d'objet souple venant de Poncelet, qui a vu, en approfondissant l'étude des coniques, que nombre de leurs propriétés restaient invariantes par « déformation insensible ». En promenant son stéthoscope le long de tels chemins fermés, Poincaré a fait de ces chemins un outil fondamental pour l'étude des objets topologiques : application de retour en dynamique qualitative, groupe fondamental, cycles homologues sont des notions directement suggérées par la considération de ces chemins. Mais chez Poincaré la stimulation physique est toujours sous-jacente ; professeur de physique théorique, il est également familier des trajectoires en forme de boucle qu'on observe en électromagnétisme, des tourbillons de l'hydrodynamique. On voit appa-

raître ici d'autres éléments de rationalité, plus ou moins organisés, difficiles à formaliser, mais qui, apportant des arguments sensibles à la raison, des éléments de justification naturelle, jouent le rôle d'aiguillon de la pensée, la mettent en confiance dans sa démarche. Sans leur présence, la mise en œuvre de ces procédures d'exploration le long de trajectoires fermées ne se serait peut-être pas imposée dans l'esprit de Poincaré avec autant de clarté.

La question se pose naturellement de savoir si les procédures de découverte créent de nouveaux problèmes ou si, au contraire, ce sont les problèmes posés qui sont à l'origine de la création de concepts, de techniques. On se doute que, selon les cas, l'une ou l'autre des éventualités prévaut. Une nouvelle technique étant mise au point, par exemple l'emploi de chemins fermés pour étudier les propriétés topologiques d'un objet, le mathématicien aura tendance à essayer de voir dans quelle mesure il peut étendre cette technique à l'étude d'autres objets, dans quelle mesure il peut la généraliser : de telles tentatives peuvent contribuer à la création d'objets. Il n'y a, dans ces démarches de l'esprit, que l'expression de la rationalité, simplement sous-tendue et alimentée, comme il est de règle, par cette capacité de l'esprit humain à établir des comparaisons, des analogies.

Il faut reconnaître que les problèmes que se pose le mathématicien ne sont pas toujours d'une originalité extrême. Comme tout homme de science, il est en face d'objets : son premier souci est de bien délimiter la classe d'objets qu'il va étudier, ce qui le conduit à une réflexion sur l'intérêt de cette classe, sur les données qui vont la définir sans ambiguïté, sur les procédures de classifications, les éléments de caractérisation de chaque objet et de chaque classe d'objets. Mais le processus qui conduit à la reconnaissance même d'un objet, puis à la mise au point d'une technique est parfois très sinueux et long.

La notion de fonction, aujourd'hui étendue en notion d'application entre espaces multidimensionnels, est encore cachée, implicite dans les œuvres des mathématiciens du XVII^e siècle. Elle émerge au XVIII^e siècle, mais n'atteint sa formalisation définitive qu'avec Jordan, il y a un siècle environ. Son statut reste ambigu : s'agit-il d'une simple mise en relation, en correspondance, d'éléments, ou bien, derrière cette apparence formelle, la seule dont les étudiants et les jeunes enseignants soient instruits, y a-t-il une ou des significations cachées dont l'exploitation implicite serait la source d'une diversification et d'un enrichissement des mathématiques ? La diversité des manières dont on répondra à cette question est une illustration des différentes formes d'esprit des mathématiciens, qui sont loin de constituer un bloc monolithique.

Certains d'entre eux sont dotés d'un esprit quelque peu autarcique : ils peuvent aller jusqu'à se complaire dans l'aspect formel des choses, et leur agilité linguistique les prédispose au maniement des symboles et du raisonnement en soi, sans référence à quelque environnement sensible. Analystes, algébristes, logiciens et logicistes* peuvent être intransigeants sur la rigueur d'exposition dont il convient de faire preuve. La pression qu'ils exercent a des effets bénéfiques, soit par les réactions que suscitent certains excès, soit par l'approfondissement conceptuel auquel chacun est convié. L'œuvre de Weierstrass au siècle dernier en donne l'exemple, le progrès peut découler de ce rigorisme de bon aloi.

Chez d'autres mathématiciens, plus proches du monde sensible, la référence à la signification physique, réelle ou présumée, de chaque notion est une source de motivation et de perspicacité. L'interprétation de la notion de fonction en tant qu'agent d'une représentation de l'objet source sur l'objet but, nous renvoyant au mythe platonicien de la caverne, ne manque pas évidemment de profondeur. Cette conception a fortement marqué le langage mathématique : « l'image d'une application », « la représentation » d'un groupe, sont des expressions consacrées. L'idée, pour décrire l'objet source, de se servir des applications au lieu des différentes images proprement dites qu'on obtiendrait à l'aide de ces applications a joué un rôle extrêmement fructueux, notamment dans la fabrication et dans la mise au point de démonstrations. On décèle, derrière cette connotation de la notion de fonction, le mathématicien formé à l'optique et à la philosophie, et l'influence subtile que peut avoir une telle formation sur sa manière d'aborder les problèmes.

Un autre aspect sémantique de la notion d'application se rencontre également dans la littérature : les termes « projection », « injection », « immersion », « surjection » et « submersion » le révèlent en partie. On s'amusera un instant, bien sûr, de l'aspect facétieux du mathématicien que pourrait révéler le choix d'une terminologie « aquatique ». À vrai dire, ce choix est particulièrement heureux car l'image marine est l'une des meilleures qui soit pour évoquer un milieu topologique, souple et indifférencié, au sein duquel un objet peut être « plongé » – autre terme mathématique. Cette terminologie souffre pourtant d'une insuffisance : elle se rapporte en effet au caractère local de l'application ; elle en évoque plus difficilement l'ef-

* Par « logiciste », j'entends quelqu'un qui n'est pas forcément préoccupé de logique (le logicien), mais qui est imprégné jusqu'à l'excès d'un souci de rigueur déductive, impossible à atteindre, sinon on aurait pu formaliser la topologie dans un des langages de la logique pure.

fet global. Globalement, la projection, la submersion aplatis, plaque l'objet de départ sur l'espace d'arrivée, de sorte que l'objet plaqué a au plus la même dimension que celle de l'espace d'arrivée (il ne s'agit pas ici d'une dimension au sens métrique du terme, mais du nombre de directions suffisantes pour établir un repère à partir duquel on peut situer tout point de l'espace). Au contraire, la dimension de l'objet source est conservée si l'on procède à une immersion de cet objet. Reste le cas où la dimension de l'objet source est égale à celle de l'espace d'arrivée : parmi les applications de ce type figurent notamment les changements de repères qui permettent d'examiner l'objet sous des angles et à partir de points de vue différents. Ces changements de repère sont très utilisés pour obtenir des présentations simples et éclairantes des objets, permettant de les classer facilement, de mettre en évidence certaines propriétés. Les submersions plus générales permettent de procéder à des découpes de l'objet initial en tranches : leur dimension est égale à la différence entre les dimensions des espaces source et image.

On voit ici apparaître les notions essentielles de singularité et d'extrémalité, profondément liées l'une à l'autre. Pour des raisons d'ordre physique et même métaphysique, ces notions sont d'une extrême fécondité et d'une grande importance. Elles apparaissent dans l'œuvre de Fermat, et joueront un rôle de plus en plus manifeste dans le développement des mathématiques.

Sur le plan psychologique, la singularité possède une double propriété : elle est attirante par son originalité, dérangement par son étrangeté. Sur le plan physique, elle possède aussi une double propriété : elle est à la fois un obstacle et, par cela même, un élément autour duquel se structure et s'organise son voisinage. La singularité renferme ainsi toute l'ambiguïté du monde. La prise de conscience des propriétés de la singularité nous permet de mieux accepter le caractère ambigu de ce monde, caractère contre lequel il devient absurde de s'insurger, qu'il est finalement vain de vouloir combattre.

C'est la géométrie qui permet d'établir le lien entre singularité et extrémalité, *via* la notion de bord d'un objet. Le bord est en effet la partie de l'objet où la dimension s'affaiblit : si le couteau est globalement un objet de dimension 3, la surface du manche est de dimension 2, la partie coupante de la lame est une ligne de dimension 1, et même, si l'on a affaire à un couteau-scie, les extrémités des dents de la scie sont des points de dimension 0. Le bord du couteau est composé de toutes ces parties de dimensions inférieures à 3. Cette définition topologique du bord coïncide ici avec la définition métrique : si l'on parvient à définir une notion de distance entre points du couteau, ce bord se confond avec le lieu des points du couteau les plus

écartés, situés sur des droites traversant le couteau. Ces points extrêmes qui définissent le bord sont également singuliers, particuliers, rares parmi l'infinité des points qui forment le domaine du couteau.

La reconnaissance de la prégnance, en mathématiques, des concepts d'extrémalité et de singularité, la prise de conscience de l'importance de leur rôle dans l'activité des mathématiciens sont récentes. Pourtant, il s'agit encore ici de notions naturelles, inscrites dans notre physiologie, son organisation, son mode de fonctionnement, dont l'emploi, primitivement inconscient, est sous l'empire de la nécessité intérieure. On voit ici la présence de la rationalité cachée, implicite, dans le processus qui conduit à l'emploi intuitif de ces concepts fondamentaux, puis à leur mise en lumière.

Ces niveaux profonds où s'exerce de manière non simpliste la rationalité physique, parce qu'ils sont difficilement atteints par l'analyse consciente et complète, sont parfois hâtivement dénommés « irrationnels », dans le meilleur des cas du ressort de l'intuition. L'intuition, « forme de connaissance immédiate qui ne recourt pas au raisonnement », est malgré tout l'expression d'un processus rationnel qui, dans un premier temps, dépasse nos capacités de perception et d'analyse. Tels des panneaux qui jalonnent une piste, des étapes de ce processus peuvent émerger au niveau conscient, pouvant guider l'activité de l'esprit dans sa recherche de la rationalité sous-jacente, à l'origine même de ces indicateurs de rationalité.

Un troisième concept fondamental, lié aux deux précédents (singularité, extrémalité), est celui de stabilité. On peut trouver au moins une fois l'expression de ces trois concepts dans l'œuvre de Platon. Il faut cependant attendre l'œuvre des mathématiciens-physiciens de ces trois derniers siècles pour que ces concepts finissent par trouver leur formalisation mathématique, et pour que certains se rendent compte combien l'activité de la pensée mathématique, une fois précisées et maîtrisées les notions d'espace et de métrique, tourne autour de ces concepts.

Les notions d'invariant et de bifurcation, cette dernière aujourd'hui à la mode, ne sont évidemment que des avatars de la notion de stabilité. La notion d'invariant a fait les beaux jours des années mathématiques 1870-1950. Elle se rapporte à un univers statique, ou bien à un univers où la réversibilité du temps est parfaite. C'est une loi : on commence toujours par étudier et essayer de comprendre le figé, le plus stable. Ce n'est qu'ensuite qu'on introduit le temps, l'évolution, ses différents modes, et à travers l'évolution les phénomènes, objets ou propriétés invariants, au moins stables.

Le renouvellement et le progrès des mathématiques sont dus en

partie à cette nouvelle vision dynamique de leur but : reconnaître les types de transformations qui opèrent sur les espaces, trouver les objets qui restent invariants ou stables par ces classes de transformations, étudier les propriétés de ces objets et leurs évolutions, notamment quand, sous l'effet des variations des paramètres, ils changent de classe de stabilité. Ce qu'on appelle aujourd'hui « topologie » ou « géométrie » (quand les espaces topologiques sont munis de métriques) recouvre l'ensemble des activités de recherche que l'on vient de mentionner. Ainsi l'appel à des considérations d'ordre général mais profondes a un impact puissant sur notre vision de l'univers mathématique, sur les sujets et les procédures de recherche.

Naturellement, comme on l'a déjà signalé, l'approfondissement des résultats de la recherche sur les pathologies, l'extension éventuelle des résultats acquis à des ensembles plus vastes, fournissent la matière à de nouvelles réflexions sur l'organisation générale de l'univers mathématique et peuvent même susciter la création d'objets mathématiques. L'exemple classique et le plus simple est celui du travail en profondeur accompli par des générations de mathématiciens pour essayer de résoudre des équations polynomiales, aboutissant entre autres à la création des nombres complexes, à la théorie de Galois, au théorème des zéros de Hilbert et à tous ses dérivés. Il y a bien sûr pléthore d'exemples plus récents, comme celui, en analyse complexe, du développement de la théorie des fonctions plurisous-harmoniques. P. Lelong, qui a beaucoup fait dans ce domaine, rappelle que Poincaré soulignait, pour l'étude des fonctions méromorphes, « l'intérêt, à l'exemple de Kronecker, de faire appel à la physique, et d'introduire des potentiels de masse positive ». Le mémoire de Poincaré, donnant un théorème essentiel qui permettra de fonder la théorie précitée, est tout à fait remarquable de sa capacité à comprendre les effets physiques et mathématiques de ses constructions. On y voit que la capacité d'« intuition » s'appuie sur un fort pouvoir de pénétration de l'esprit, étayé par une culture très riche.

L'esprit possède aussi, de manière naturelle, et plus ou moins accentuée, des capacités manipulatoires : les calculateurs prodiges sont là pour nous montrer les prouesses que l'homme parvient à accomplir. Dans leur cas, une mécanique biologique, à la construction encore tout à fait mystérieuse, se met en marche, et fonctionne à toute vitesse : dans ce processus mental, la réflexion ne semble pas jouer un quelconque rôle. La rationalité est présente, mais au simple niveau de cette mécanique. Que le cerveau de certains mathématiciens présente des ressemblances ou des affinités avec celui de ces calculateurs est très vraisemblable : la dextérité calculatoire que l'on rencontre dans ces trois domaines où le nombre joue un rôle essen-

tiel – l'arithmétique, la combinatoire, l'analyse – donne à penser que le mathématicien fait appel à ces fonctions mentales à l'activité très rapide, qui lui imposent la voie de découverte et de démonstration de certaines propriétés. C'est probablement dans cette direction que l'on rencontrera, dans le comportement mental du mathématicien, la plus grande part d'inconnu, d'inexpliqué, que l'on qualifiera exagérément d'irrationnel.

Les résultats obtenus par le calcul n'ont rien de profond par eux-mêmes. Mais ils sont parfois associés ou même révélateurs de faits profonds, dont la nature est physique et même métaphysique. Par exemple, la prise de conscience de l'importance, en mathématique et dans les autres sciences, de la notion de singularité est le résultat d'un long processus : le début de ce processus remonte, en mathématiques, et de manière un peu arbitraire, aux travaux du début du XIX^e siècle, ceux de Cauchy notamment, sur l'intégration des fonctions de la variable complexe. Les pôles des fonctions méromorphes constituent des singularités, en l'occurrence des *obstacles* qu'il faut contourner pour parvenir à intégrer ces fonctions. De manière générale, la présence d'une singularité est liée à une irrégularité locale et semble-t-il gênante : on parvient à la déjouer en déployant la singularité, l'obstacle, en un domaine plus vaste mais régulier d'un espace de plus grande dimension.

Cette procédure qui consiste, étant donné une difficulté, à prendre de la hauteur, à adopter en quelque sorte un point de vue de Sirius pour mieux dominer la situation, doit-elle être considérée comme une démarche rationnelle ou non ? Donnons d'abord quelques exemples élémentaires où, cachée sous des habits bien différents, cette procédure est employée. Nous la rencontrons en premier lieu dans l'algèbre : celle de l'arithmétique, où l'on a commencé par remplacer les nombres par des lettres et raisonner sur des expressions littérales ; celle des espaces fonctionnels où les fonctions polynomiales, à travers la géométrie algébrique et l'arithmétique, ont joué un rôle central. Nous rencontrons à nouveau cette procédure en théorie des nombres, au moment de la création des nombres complexes, plus généralement lors de la création de nombres par la méthode des extensions. Les prémisses de cette procédure apparaissent également dans la conception, entrevue par N. Oresme ou Kant, d'espaces multidimensionnels.

Il est clair que, dans ces situations, l'observation répétée de cas possédant la même formulation est une invite naturelle à établir des formulations générales, des énoncés qui transcendent les cas particuliers. La démarche de l'esprit, autant fondée sur l'analogie que sur la synthèse, est une démarche de bon sens.

Ce point de vue de Sirius, sous-tendu en premier lieu par un souci d'universalité, présente l'avantage de promouvoir la réponse à la question : dans quelle mesure une vérité locale a-t-elle une valeur plus générale ? Cette question en appelle d'autres : il faut en effet s'entendre au préalable sur l'étendue de cette généralité, et pour cela définir avec précision le cadre le plus large à l'intérieur duquel on pourra, de manière pertinente, travailler. Une fois cette mise en forme accomplie, qui permet d'élaguer les propriétés secondaires et de mettre en évidence les propriétés fondatrices et principales, reprend le travail proprement constructif du mathématicien. Toute l'histoire du progrès des mathématiques est profondément marquée par l'influence déterminante de la construction de ces théories chaque fois plus englobantes. C'est en définitive par leur intermédiaire que des propriétés d'apparence particulières révèlent leur signification générale, et finalement parviennent à être démontrées. Par exemple, deux articles récents de S. Lang rappellent le rôle joué par l'œuvre généralisatrice et constructive de Grothendieck en géométrie algébrique, parvenant, notamment, à donner une version très générale du théorème de Riemann-Roch, théorème pivot dans les développements récents des différentes branches de la géométrie algébrique, dans ses succès comme par exemple la résolution par Deligne de l'analogie de l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques. Un autre texte, plus fondateur, où apparaît la toute-puissance de la généralisation, est l'ouvrage d'Alain Connes sur la géométrie non commutative et ses applications à la description de la physique quantique : on y retrouve l'usage du théorème de Riemann-Roch et d'autres notions générales développées ou introduites par Grothendieck (K-théorie, topos).

Ces constructions générales s'imposent au mathématicien : la familiarité avec les cas particuliers lui permet de voir aussitôt la structure sous-jacente aux exemples qu'il manipule, ses articulations principales qu'il traduit sous forme d'axiomes. Il n'y a en l'occurrence rien d'irrationnel dans sa démarche ; tout au contraire, elle est l'expression d'une rationalité très claire et en quelque sorte naturelle. La nécessité et le bon sens imposent de montrer aux collègues l'organisation discrète de l'univers à l'intérieur duquel ils travaillent. La meilleure intelligence de cet univers, observé de plus loin mais avec un regard pénétrant, permet de mieux déceler et mettre au jour les chemins qui courent entre les propositions.

Proposons cette comparaison : cet univers des idées est semblable dans sa genèse à celui d'un univers géographique, à une planète dont nous essayons de préciser le relief. Par temps clair, ou parce que nous en sommes proches et dotés de très bons instru-

ments, pics, cols et vallées se font voir d'emblée sous un jour cohérent, une sorte de nécessité interne implique leur présence en tel lieu, leur étendue. Il arrive fréquemment que les conditions d'observation ne soient pas aussi favorables. Mais l'observateur averti, doté d'une solide expérience professionnelle, d'une grande patience et d'une grande concentration, repère des indices, de plus en plus nombreux au fil du temps, de sorte que le paysage géographique dont il veut percer les secrets finit, petit à petit, par prendre forme. Des pans de cet univers se mettent en place, la position de tel indice étant induite, s'expliquant par celle de tel autre. Un seuil de reconstitution atteint, le voile se déchire et le paysage apparaît en toute clarté.

Par intuition, nous désignons un ensemble d'activités mentales qui comprend l'observation et la réminiscence de faits analogues et d'indices. Ceux-ci suggèrent l'existence de telle propriété, dont on finit par conjecturer la présence. Ce sont les premiers éléments d'un puzzle que des raisons morphologiques locales vont permettre de reconstituer. En l'occurrence, la culture mathématique du chercheur, ses compétences dans d'autres domaines, la maîtrise et la souplesse qu'il a acquises dans l'exercice du raisonnement, faisant appel à des raisons plus ou moins diverses et lointaines, à des comparaisons entre situations *a priori* étrangères les unes aux autres, lui permettent de deviner, de remarquer ou simplement de souligner la présence de telle ou telle propriété, et finalement d'exposer les raisons de son existence.

On peut alors soutenir que l'intuition est une manifestation très fine et très élaborée de la rationalité profonde de l'être. Les qualités intrinsèques, la formation, et en particulier l'exercice sont à la source du déploiement de cette intuition.

L'image géographique que nous avons prise n'est pas innocente. Elle témoigne du caractère spatial de notre activité mentale. Elle prend en compte des considérations de nature géométrique dans le déroulement même de cette activité : le raisonnement n'est autre, souvent, que la description de l'enchaînement de morphologies s'emboîtant à la manière des pièces d'un puzzle. Cette vision décrit le raisonnement achevé. Le raisonnement actif, opératoire, créateur, est un processus constructif qui déplace les pièces, les retourne parfois de manière inattendue, les déforme, les relie, vérifie et justifie la possibilité de leur accouplement. Ce qui amène à distinguer deux types de démonstration : celle qui ne fait que s'appuyer sur des résultats connus, de la déduction desquels on justifie l'assertion proposée ; celle qui non seulement utilise le procédé précédent, mais s'appuie aussi sur un mode original de construction, auquel la démonstration doit son caractère excitant, fascinant, sa beauté propre. Le dévelop-

pement de la topologie est caractéristique de ce point de vue, comme le montrent par exemple les travaux de Thurston et de Poenaru qui fourmillent de constructions originales. C'est à ce niveau sans doute que l'on se rapproche le plus de l'irrationalité. L'irruption de cette nouvelle manière de faire détruit une routine mentale, une tendance à l'ankylose de l'esprit. C'est à ce moment que l'on savoure le fin plaisir apporté par l'astuce, sorte d'aiguillon habile qui excite et fait rire l'esprit.

La construction permet d'insuffler la vie aux mathématiques ; quant au raisonnement, il est le ciment qui donne à l'édifice intellectuel sa solidité.

Nous avons maintenant en main assez d'éléments pour pouvoir aborder ici de manière brève, et pour conclure, ce thème pédagogique : comment développer, chez l'enfant, la rationalité dans ses formes directes ou subtiles ? À l'évidence, l'étude des mathématiques favorisera la formation des procédures de raisonnement. Cette étude suppose que l'on ne se contente pas, comme on le fait malheureusement depuis quelques années, d'enseigner des recettes aux élèves. Une telle cuisine scolaire est insipide, et sans grand intérêt pour la formation de l'esprit. Il est indispensable que ces élèves rencontrent des démonstrations vraies, parviennent à les maîtriser, d'abord pour s'exercer au raisonnement brut, mais également pour développer l'intuition. Comme Poincaré l'a souligné, l'exercice de la géométrie est le plus apte à favoriser l'expression de l'intuition : c'est en effet en géométrie élémentaire que l'on rencontre le plus aisément ces constructions originales et pourtant faciles qui entraînent l'esprit à l'élaboration de petits puzzles mentaux attrayants. Une société ne saurait, sans risque grave pour sa pérennité, renoncer à ces jouets éducatifs millénaires, et dont les qualités ont été éprouvées au fil des siècles.

DEUXIÈME PARTIE

FAIRE DES MATHÉMATIQUES